Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт вычислительного моделирования

А.А.Новоселов

Математическое моделирование финансовых рисков

Теория измерения

Новосибирск 2001

УДК 519.21+336

Книга посвящена математической теории риска - интенсивно развивающемуся разделу теории вероятностей, имеющему многочисленные приложения к экономике, финансам, а также другим областям человеческой деятельности, связанным с принятием решений в условиях неопределенности. Особое внимание уделяется проблеме измерения риска – количественному описанию предпочтений на множестве вероятностных распределений. Предлагается один подход к аксиоматизации нелинейных предпочтений, развивающий линейную теорию фон Неймана – Моргенштерна, рассматриваются задачи портфельного анализа и процессы риска.

Монография ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся приложениями теории вероятностей к социальной сфере, в том числе – к финансам, страхованию и общей проблематике принятия решений с учетом индивидуальных предпочтений. Книга доступна также студентам старших курсов математических специальностей, и может быть использована для углубления познаний в перечисленных областях.

Оглавление

Введение

Моделирование финансовых рисков представляет собой интенсивно развивающуюся область исследований с многочисленными практическими приложениями. Простейшие модели применялись к страховым расчетам еще в древности; в новое время с развитием теории вероятностей также предпринимались разрозненные попытки построения математических моделей, предназначенных для прогнозирования финансовых рисков и управления ими. Однако систематическое построение теории стало возможным лишь в конце первой половины двадцатого века, когда А.Н. Колмогоровым была завершена аксиоматизация теории вероятностей, а Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном создан математический аппарат для описания индивидуальных предпочтений.

До недавнего времени финансовая и актуарная ветви теории развивались параллельно и, в значительной степени, независимо друг от друга. В последнее десятилетие все заметнее проявляется тенденция к объединению этих ветвей в единую теорию. В настоящей монографии в качестве базы для такого объединения предлагается использовать теорию принятия решений в условиях вероятностной неопределенности. В рамках этой модели принятие решения представляет собой выбор наилучшего вероятностного распределения из некоторого допустимого множества распределений, причем термин "наилучший"понимается в смысле отношения индивидуального предпочтения.

Для решения такого рода задач необходимо предварительно подготовить количественное описание отношения предпочтения, то есть, представить его монотонным функционалом – мерой риска. В случае линейного отношения предпочтения эта проблема была решена в [15]. Для нелинейного случая проблема остается открытой; здесь предлагается один подход к ее решению.

Монография построена следующим образом. В первой главе приведены некоторые предварительные сведения, необходимые для последующего изложения. Во второй главе описывается теория риска, как теория принятия решений в условиях неопределенности, и изучаются некоторые известные меры риска. Третья глава посвящена описанию задачи портфельного анализа, являющейся иллюстративным материалом для применения теории. В четвертой главе предпринимается попытка реализации аксиоматического подхода к построению меры риска для нелинейной системы предпочтений. В пятой главе рассмотрена проблема измерения риска в динамических моделях (процессах риска).

Глава 1

Предварительные сведения

В настоящей главе приведено краткое изложение тех сведений, которые систематически используются в монографии. Сначала описываются отношения порядка, эквивалентности и предпочтения, а также связи между ними. Затем описываются свойства функционалов, являющихся монотонными относительно частичного порядка или предпочтения. В параграфе 1.3 вводится понятие реверса упорядоченного множества и изучаются его свойства. Далее, в параграфе 1.4 описывается погружение множества вероятностных распределений в линейное пространство обобщенных мер. Затем описываются распределения на упорядоченных множествах, в частности, с помощью реверса вводится понятие двойственного распределения. Заключительный параграф 1.6 посвящен описанию естественных частичных порядков на множестве распределений.

1.1 Отношения

Рассмотрим произвольное множество $\mathcal{X}$.

Определение 1.1 *Отношением на $\mathcal{X}$ называется подмножество в декартовом произведении $\mathcal{X}$ на $\mathcal{X}$.*

Отношение R называется *рефлексивным*, если

$$(x,x) \in R,\ x \in \mathcal{X},$$

симметричным, если

$$(x,y) \in R \implies (y,x) \in R,$$

антисимметричным, если

$$(x,y) \in R,\ (y,x) \in R \implies x = y,$$

транзитивным, если

$$(x, y) \in R,\ (y, z) \in R \implies (x, z) \in R.$$

Отношение называется *полным*, если для всякой пары $x, y \in \mathcal{X}$ выполняется по крайней мере одно из включений $(x, y) \in R$, $(y, x) \in R$. Отметим здесь, что всякое полное отношение является рефлексивным.

Определение 1.2 *Рефлексивное симметричное транзитивное отношение на $\mathcal{X}$ называется отношением эквивалентности.*

Для этого отношения наряду с $(x, y) \in R$ используется обозначение $x \sim y$. Если на $\mathcal{X}$ задано отношение эквивалентности $\sim$, то $\mathcal{X}$ разбивается на классы эквивалентности

$$\mathcal{X} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{X}_\lambda, \tag{1.1}$$

где $\sum$ обозначает объединение непересекающихся множеств. При этом $x \sim y$ в том и только в том случае, когда $x, y \in \mathcal{X}_\lambda$ при некотором $\lambda \in \Lambda$. Разбиение (1.1) может служить для задания отношения эквивалентности: любое разбиение $\mathcal{X}$ на непересекающиеся множества вида (1.1) порождает на $\mathcal{X}$ отношение эквивалентности. Совокупность классов эквивалентности

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{\mathcal{X}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$$

называется фактор-множеством $\mathcal{X}$ по отношению эквивалентности $\sim$.

Определение 1.3 *Рефлексивное антисимметричное транзитивное отношение на $\mathcal{X}$ называется отношением частичного порядка.*

Для отношения частичного порядка наряду с $(x, y) \in R$ используется обозначение $x \leq y$. Множество $\mathcal{X}$ вместе с отношением частичного порядка будем обозначать $(\mathcal{X}, \leq)$ и называть частично упорядоченным множеством. Удобно также рассматривать отношение строгого порядка $<$, порождаемое по правилу

$$x < y \iff x \leq y,\ x \neq y,$$

и противоположные отношения $x \geq y$ $(x > y)$, означающие, соответственно, $y \leq x$ $(y < x)$.

Если отношение $\leq$ является полным, то есть для произвольных $x, y \in \mathcal{X}$ выполняется по крайней мере одно из соотношений $x \leq y$, $y \leq x$, то $(\mathcal{X}, \leq)$ называется *линейно упорядоченным* множеством, а само отношение $\leq$ – *линейным порядком.*

Рассмотрим частично упорядоченное множество $(\mathcal{X}, \leq)$, и введем на нем понятие интервала. Для $x, y \in \mathcal{X}$ обозначим

$$[x, y] = \{z \in \mathcal{X} |\ x \leq z \leq y\}, \quad (x, y) = \{z \in \mathcal{X} |\ x < z < y\} \tag{1.2}$$

замкнутый и открытый интервалы, образованные точками x, y. Будем рассматривать также полуоткрытые интервалы

$$(x, y] = \{z \in \mathcal{X} |\ x < z \leq y\}, \quad [x, y) = \{z \in \mathcal{X} |\ x \leq z < y\} \tag{1.3}$$

и "полубесконечные"интервалы

$$(\leftarrow, x] = \{z \in \mathcal{X} |\ z \leq x\}, \quad (\leftarrow, x) = \{z \in \mathcal{X} |\ z < x\}, \tag{1.4}$$

$$[x, \rightarrow) = \{z \in \mathcal{X} |\ x \leq z\}, \quad (x, \rightarrow) = \{z \in \mathcal{X} |\ x < z\}. \tag{1.5}$$

Точка $x \in A$ называется *наибольшим (наименьшим)* элементом подмножества $A \subseteq \mathcal{X}$, если

$$y \leq (\geq) x, \ y \in A.$$

Множество $A \subseteq \mathcal{X}$ называется *открытым*, если в нем нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, и *замкнутым*, если в нем есть как наибольший, так и наименьший элементы.

Точка $x \in A$ называется *максимальным (минимальным)* элементом множества A, если $y \geq (\leq) x$, $y \in A$ влечет $y = x$.

Два линейно упорядоченных множества $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \leq_{\mathcal{Y}})$ называются (порядково) *подобными*, если существует взаимно-однозначное монотонное отображение f множества $\mathcal{X}$ на множество Y:

$$x_1 <_{\mathcal{X}} x_2 \iff f(x_1) <_{\mathcal{Y}} f(x_2), \ \ x_1, x_2 \in \mathcal{X}.$$

Само отображение f при этом называется *подобием.*

Сечением линейно упорядоченного множества $(\mathcal{X}, \leq)$ называется разбиение $\mathcal{X} = A + B$ такое, что $a < b, \ a \in A, \ b \in B$, при этом A и B называются нижним и верхним классами сечения, соответственно. Сечение называется *дедекиндовым*, если в нижнем классе есть наибольший элемент, а верхнем классе нет наименьшего, либо в нижнем классе нет наибольшего элемента, а в верхнем классе есть наименьший; другими словами, если сечение представимо в виде $\mathcal{X} = (\leftarrow, c] \cup (c, \rightarrow)$ либо $\mathcal{X} = (\leftarrow, c) \cup [c, \rightarrow)$. Линейно упорядоченное множество называется *непрерывным*, если все сечения в нем дедекиндовы. Подмножество $D \subseteq \mathcal{X}$ называется *плотным* в $(\mathcal{X}, \leq)$, если каждый непустой интервал в $\mathcal{X}$ содержит хотя бы одну точку из D.

Определение 1.4 *Непрерывное линейно упорядоченное множество, содержащее счетное плотное подмножество, называется вещественно-подобным.*

Приведем здесь один результат из [1] (теорема 3.1.2), который будет использован при описании распределений на упорядоченных множествах, и который оправдывает введенное определение.

Предложение 1.5 *Открытое (замкнутое) вещественно - подобное упорядоченное множество порядково подобно множеству всех вещественных чисел (сегменту* $[0,1]$*).*

Отношение предпочтения, которое описывается далее, играет в настоящей работе одну из центральных ролей.

Определение 1.6 *Полное транзитивное отношение на* $\mathcal{X}$ *называется отношением предпочтения.*

Для отношения предпочтения наряду с $(x,y) \in R$ будем использовать обозначение $x \preceq y$. Множество $\mathcal{X}$ с введенным на нем отношением предпочтения $\preceq$ будем обозначать $(\mathcal{X}, \preceq)$ и называть множеством с предпочтениями. Отношение предпочтения $\preceq$ порождает на $\mathcal{X}$ отношение строгого предпочтения $\prec$ по правилу

$$x \prec y \iff x \preceq y,\ y \not\preceq x.$$

Соотношения $x \preceq y$ $(x \prec y)$ иногда удобно записывать в виде $y \succeq x$ $(y \succ x)$. Отношение предпочтения $\preceq$ порождает на $\mathcal{X}$ также отношение эквивалентности

$$x \sim y \iff x \preceq y,\ y \preceq x, \tag{1.6}$$

а фактор-множество $\widetilde{\mathcal{X}}$ по этому отношению эквивалентности оказывается линейно упорядоченным: для $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{\mathcal{X}}$

$$\widetilde{x} \leq \widetilde{y} \iff \exists x \in \widetilde{x},\ \exists y \in \widetilde{y}:\ x \preceq y.$$

Обозначим K отображение из $\mathcal{X}$ на $\widetilde{\mathcal{X}}$, ставящее в соответствие каждому $x \in \mathcal{X}$ его класс эквивалентности: $x \in K(x) \in \widetilde{\mathcal{X}}$, и будем называть это отображение *каноническим.*

В множестве $(\mathcal{X}, \preceq)$ с предпочтениями, как и в случае отношения частичного порядка, можно рассматривать замкнутые и открытые интервалы

$$[x,y] = \{z \in \mathcal{X} |\ x \preceq z \preceq y\}, \quad (x,y) = \{z \in \mathcal{X} |\ x \prec z \prec y\}, \tag{1.7}$$

а также полуоткрытые

$$(x,y] = \{z \in \mathcal{X} |\ x < z \preceq y\}, \quad [x,y) = \{z \in \mathcal{X} |\ x \preceq z \prec y\} \tag{1.8}$$

и полубесконечные

$$(\leftarrow, x] = \{z \in \mathcal{X} |\ z \preceq x\}, \quad (\leftarrow, x) = \{z \in \mathcal{X} |\ z \prec x\}, \tag{1.9}$$

$$[x, \rightarrow) = \{z \in \mathcal{X} |\ x \preceq z\}, \quad (x, \rightarrow) = \{z \in \mathcal{X} |\ x \prec z\}. \tag{1.10}$$

интервалы.

Полубесконечные интервалы (1.9) – (1.10) будем называть также *множествами уровня*. Ясно, что множества уровня эквивалентных элементов совпадают: например, $x \sim y$ влечет $(\leftarrow, x] = (\leftarrow y]$. Поэтому каждое множество уровня вполне определяется классом эквивалентности $\widetilde{x} = K(x)$, в котором лежит x, и совпадает с объединением всех классов эквивалентности из соответствующего порядкового отрезка, например

$$(\leftarrow, x] = \sum_{\widetilde{z} \in (\leftarrow, K(x)]} \widetilde{z}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Элемент $x \in A$ называется наибольшим (наименьшим) в множестве $A \subseteq \mathcal{X}$, если

$$y \preceq (\succeq) x, \quad y \in A.$$

Наибольший элемент, вообще говоря, не является единственным. Точнее, если x – наибольший элемент $A \subseteq \mathcal{X}$, то совокупность всех наибольших элементов множества A есть $K(x) \cap A$. Аналогичное замечание справедливо для наименьшего элемента. Понятие максимального (минимального) элемента в случае отношения предпочтения совпадает с понятием наибольшего (наименьшего) элемента.

1.2 Монотонные функционалы

Пусть $(\mathcal{X}, \leq)$ – частично упорядоченное множество.

Определение 1.7 *Функционал $\mu: \ \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ называется монотонным (соответственно, возрастающим или убывающим) по порядку, если для произвольных $x, y \in \mathcal{X}$*

$$x < y \implies \mu(x) < \ (>)\ \mu(y). \tag{1.11}$$

Пусть теперь $(\mathcal{X}, \preceq)$ – множество с предпочтениями.

Определение 1.8 *Функционал $\mu: \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ называется монотонным (соответственно, возрастающим или убывающим) по предпочтению, если для произвольных $x, y \in \mathcal{X}$*

$$x \preceq y \iff \mu(x) \leq (\geq) \mu(y). \tag{1.12}$$

Напомним, что отношение предпочтения порождает на $\mathcal{X}$ отношение эквивалентности $\sim$. Понятно, что каждому монотонному функционалу $\mu: \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ соответствует монотонный (относительно линейного порядка на $\widetilde{\mathcal{X}}$) функционал $\widetilde{\mu}: \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathbf{R}$, заданный на фактор-пространстве $\widetilde{\mathcal{X}}$: $\mu(x) = \widetilde{\mu}(K(x))$, $x \in \mathcal{X}$, где K – каноническое отображение $\mathcal{X}$ в фактор-пространство $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Рассмотрим произвольный функционал $\mu: \mathcal{X} \to \mathbf{R}$. Для $x, y \in \mathcal{X}$ положим $x \prec_\mu y$, $x \sim_\mu y$, $x \succ_\mu y$ в случаях $\mu(x) < \mu(y)$, $\mu(x) = \mu(y)$, $\mu(x) > \mu(y)$, соответственно. Нетрудно убедиться в том, что отношение

$$x \preceq_\mu y \iff x \prec_\mu y \text{ или } x \sim_\mu y \tag{1.13}$$

полно и транзитивно; назовем его отношением предпочтения, порожденным функционалом μ. Таким образом, справедливо

Предложение 1.9 *Пусть $\mu: \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ – произвольный функционал. Тогда (1.13) задает отношение предпочтения, а μ является возрастающим относительно $\preceq_\mu$.*

По заданному функционалу μ можно аналогично определить отношение предпочтения, относительно которого μ оказывается убывающим.

Пусть $\mu: \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ – некоторый функционал с областью значений $A = \mu(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{R}$, а $f: A \to \mathbf{R}$ – строго возрастающая функция. Определим функционал ν выражением

$$\nu(x) = f(\mu(x)), x \in \mathcal{X}. \tag{1.14}$$

Очевидно следующее

Предложение 1.10 *Функционалы μ и ν, связанные соотношением (1.14) со строго возрастающей функцией f, порождают одно и то же отношение предпочтения на $\mathcal{X}$.*

Представляет значительный интерес также решение обратной задачи: по заданному на $\mathcal{X}$ отношению предпочтения построить на $\mathcal{X}$ функционал, монотонный относительно этого отношения предпочтения. Решение этой задачи будет подробно рассматриваться в следующих главах. Здесь же сформулируем

Предложение 1.11 *Пусть $(\mathcal{X}, \preceq)$ – множество с предпочтениями. Если фактор - пространство $\widetilde{\mathcal{X}}$ по отношению эквивалентности, порожденному предпочтением $\preceq$, порядково подобно некоторому подмножеству в $\mathbf{R}$, то существует (единственный с точностью до строго монотонных преобразований) функционал $\mu = \mu_{\preceq} : \ \mathcal{X} \to \mathbf{R}$, монотонный относительно $\preceq$.*

Замечание 1.12 *Один критерий порядкового подобия линейно упорядоченного множества и $\mathbf{R}$ приведен в предложении 1.5.*

Пусть $\mu_1, ..., \mu_n$ – функционалы на $\mathcal{X}$, каждый из которых индуцирует свое отношение предпочтения на $\mathcal{X}$. Иногда полезно рассмотреть *взвешенный* функционал

$$\mu(x) = w_1\mu_1 + \cdots + w_n\mu_n, \tag{1.15}$$

где весовые коэффициенты $w_1, \cdots, w_n$ вещественны. Функционал μ порождает новое отношение предпочтения, которое может обладать свойствами, отсутствующими у исходных функционалов.

Пусть $\mathcal{X}$ является выпуклым подмножеством линейного пространства. Тогда имеет смысл следующее

Определение 1.13 *Функционал μ, заданный на выпуклом множестве $\mathcal{X}$ некоторого линейного пространства, называется выпуклым (вогнутым, линейным), если для произвольных $x, y \in \mathcal{X}$ и произвольного $\alpha \in [0,1]$ выполняется условие*

$$\mu(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \ (\geq, \ =) \ \alpha\mu(x) + (1-\alpha)\mu(y).$$

1.3 Реверс упорядоченного множества

Пусть $(\mathcal{X}, \leq)$ – частично упорядоченное множество.

Определение 1.14 *Реверсивным отображением или реверсом s упорядоченного множества $(\mathcal{X}, \leq)$ называется взаимно-однозначное отображение $\mathcal{X}$ на себя, обладающее следующим свойством монотонности:*

$$x < y \implies s(x) > s(y). \tag{1.16}$$

Пример 1.15 *Пусть $\mathcal{X} = \mathbf{R}^n$, а $\leq$ – естественный порядок в $\mathbf{R}^n$, то есть, для $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$*

$$x \leq y \iff x_1 \leq y_1, ..., x_n \leq y_n.$$

Тогда для любого $a \in \mathbf{R}^n$ *отображение*

$$s_a(x) = 2a - x,\ x \in \mathbf{R}^n$$

является реверсом. В частности, при $a = 0$ *получаем канонический реверс*

$$s(x) = s_0(x) = -x,\ x \in \mathbf{R}^n.$$

Пример 1.16 *Пусть* X *– некоторое множество, а* $\mathcal{X} = 2^X$ *– совокупность всех его подмножеств, упорядоченная по включению. Тогда*

$$s(x) = x^c,\ x \in \mathcal{X} \tag{1.17}$$

является реверсом на 2^X*, где* $x^c = X \setminus x$ *обозначено дополнение множества* $x \subseteq X$.

Отметим, что для существования реверса множество $\mathcal{X}$ должно обладать некоторой симметрией. Так, на множестве натуральных чисел не существует ни одного реверса.

Будем называть реверс s *симметричным*, если $s(s(x)) = x$, $x \in \mathcal{X}$, то есть $s^{-1} = s$. Реверсы из примеров (1.15), (1.16) являются, очевидно, симметричными. Примером несимметричного реверса для случая $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ (с обычным порядком на множестве вещественных чисел) может служить отображение

$$s(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ -x/2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Этот реверс не является симметричным, поскольку, например $s(s(1)) = 1/2$.

На некоторых упорядоченных множествах существуют только симметричные реверсы.

Предложение 1.17 *Пусть* $(\mathcal{X}, \leq)$ *– конечное линейно упорядоченное множество. Тогда на* $(\mathcal{X}, \leq)$ *существует единственный реверс, являющийся к тому же симметричным.*

Доказательство. Пусть $|\mathcal{X}| = n$. Занумеруем элементы $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_n\}$ в порядке возрастания:

$$x_1 < ... < x_n.$$

Тогда отображение $s(x_k) = x_{n+1-k}$, $k = 1, ..., n$ задает реверс, причем любое другое взаимно-однозначное отображение представимо в виде композиции $p \circ s$ реверса s с некоторой перестановкой p на $\mathcal{X}$, так что отображение $p \circ s$ не удовлетворяет (1.16). Таким образом, реверс s единствен, а его симметричность очевидна. $\diamond$

На частично упорядоченных множествах, даже конечных, возможно существование нескольких симметричных реверсов. Для иллюстрации рассмотрим множество $X = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов, и частично упорядоченное множество $(2^X, \subseteq)$. Кроме стандартного реверса (1.17) на этом множестве существует еще реверс t, задаваемый соотношениями

$$t(\emptyset) = X,\ t(X) = \emptyset,\ t(\{x\}) = \{x\},\ t(\{y\}) = \{y\},$$

который тоже является симметричным.

Отметим, что образ интервала при реверсивном отображении является интервалом, в частности, $s([x, y]) = [s(y), s(x)]$ и

$$s((\leftarrow, x]) = [s(x), \rightarrow). \tag{1.18}$$

Задание реверса на линейно упорядоченном множестве индуцирует на нем структуру, которая описана в следующем предложении.

Предложение 1.18 *Пусть* $(\mathcal{X}, \leq)$ *– линейно упорядоченное множество,* s *– некоторый реверс на* $(\mathcal{X}, \leq)$. *Тогда*

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_- + \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_+, \tag{1.19}$$

где

$$\mathcal{X}_- = \{x \in \mathcal{X} |\ s(x) > x\},$$
$$\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathcal{X} |\ s(x) = x\},$$
$$\mathcal{X}_+ = \{x \in \mathcal{X} |\ s(x) < x\},$$

причем

$$x_- < x_0 < x_+ \ \text{ при всех } \ x_- \in \mathcal{X}_-,\, x_0 \in \mathcal{X}_0,\, x_+ \in \mathcal{X}_+ \tag{1.20}$$

и

$$s(\mathcal{X}_-) = \mathcal{X}_+,\ s(\mathcal{X}_0) = \mathcal{X}_0,\ s(\mathcal{X}_+) = \mathcal{X}_-. \tag{1.21}$$

Множество $\mathcal{X}_0$ *содержит не более одного элемента.*

Доказательство. Ввиду линейной упорядоченности множества $(\mathcal{X}, \leq)$ справедливость разбиения (1.19) непосредственно вытекает из определения множеств $\mathcal{X}_-, \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_+$. Если $\mathcal{X}_0$ содержит два различных элемента, например, $x < y$, то с необходимостью $s(x) < s(y)$, что противоречит (1.16). Осталось показать соотношения (1.20), (1.21).

Предположим сначала, что $\mathcal{X}_0$ состоит из одного элемента x_0. Покажем, что $\mathcal{X}_- = (\leftarrow, x_0)$. Пусть x – некоторый элемент $\mathcal{X}_-$, то есть $s(x) > x$. Если бы выполнялось $x > x_0$, то ввиду монотонности s была бы справедливо цепочка неравенств $s(x) < s(x_0) = x_0 < x$, что противоречит предположению $x \in \mathcal{X}_-$. Предположение $x = x_0$ также приводит к противоречию, поэтому $x \in \mathcal{X}_-$ влечет $x < x_0$. Пусть теперь $x < x_0$; ввиду монотонности s имеем $s(x) > s(x_0) = x_0 > x$, так что $x < x_0$ влечет $x \in \mathcal{X}_-$. Таким образом, действительно,

$$\mathcal{X}_- = (\leftarrow, x_0). \tag{1.22}$$

Аналогичные рассуждения приводят к представлению

$$\mathcal{X}_+ = (x_0, \rightarrow). \tag{1.23}$$

Из (1.22), (1.23) непосредственно следует (1.20), а из последнего, с учетом монотонности (1.16), вытекает $s(\mathcal{X}_-) \subseteq \mathcal{X}_+$, $s(\mathcal{X}_+) \subseteq \mathcal{X}_-$. Ввиду взаимной однозначности s последние соотношения эквивалентны (1.21).

Пусть теперь $\mathcal{X}_0 = \emptyset$. Зафиксируем произвольные элементы $x_- \in \mathcal{X}_-$, $x_+ \in \mathcal{X}_+$. Предположение $x_- > x_+$ влечет по определению $\mathcal{X}_-$, $\mathcal{X}_+$ цепочку неравенств $s(x_-) > x_- > x_+ > s(x_+)$, которая противоречит монотонности s. Предложение доказано. $\diamond$

Отметим здесь, что множества $\mathcal{X}_-$, $\mathcal{X}_+$, $\mathcal{X}_0$ могут быть представлены в виде

$$\mathcal{X}_- = \bigcup_{x \in \mathcal{X}_-} (\leftarrow, x], \quad \mathcal{X}_+ = \bigcup_{x \in \mathcal{X}_+} [x, \rightarrow), \quad \mathcal{X}_0 = \bigcap_{x \in \mathcal{X}_-,\, y \in \mathcal{X}_+} (x, y),$$

и, кроме того,

$$\mathcal{X}_- \bigcup \mathcal{X}_0 = \bigcap_{x \in \mathcal{X}_+} (\leftarrow, x), \quad \mathcal{X}_+ \bigcup \mathcal{X}_0 = \bigcap_{x \in \mathcal{X}_-} (x, \rightarrow).$$

Заметим также, что разбиение (1.19) по существу определяет сечения $\mathcal{X}$. Точнее, если $\mathcal{X}_0 = \{x_0\}$, то возникают два сечения, в одном из которых $\mathcal{X}_- + \mathcal{X}_0$ является нижним классом, а $\mathcal{X}_+$ – верхним; в другом сечении нижний класс представлен множеством $\mathcal{X}_-$, а верхний – множеством $\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_+$. Если же множество $\mathcal{X}_0$ пусто, то реверс задает единственное сечение $\mathcal{X} = \mathcal{X}_- + \mathcal{X}_+$.

1.4 Вероятностные распределения и обобщенные меры

Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ – измеримое пространство. Задавая на $\mathcal{B}$ произвольную вероятностную меру P, можно построить вероятностное пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$. Обозначим $\mathcal{P}$ совокупность всевозможных вероятностных распределений на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Для дальнейшего нам требуется погрузить $\mathcal{P}$ в подходящее линейное пространство, к построению которого теперь и приступим.

Определение 1.19 *Функция множества $L: \mathcal{B} \to \mathbf{R}$ называется σ-аддитивной, если для произвольной не более чем счетной совокупности непересекающихся множеств $B_i \in \mathcal{B},\ i = 1, 2, ...$ выполняется соотношение*

$$L\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} L\left(B_i\right).$$

Для $B \in \mathcal{B}$ обозначим $\Delta(B)$ совокупность всевозможных конечных разбиений $\delta = \{B_1, ..., B_n\}$ множества B, то есть, наборов непересекающихся множеств $B_i \in \mathcal{B},\ i = 1, ..., n$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = B.$$

Для фиксированного разбиения $\delta = \{B_1, ..., B_n\}$ из $\Delta(B)$ обозначим

$$V_{L\delta}(B) = \sum_{i=1}^{n} |L(B_i)|.$$

Определение 1.20 *Вариацией (изменением) функции множества L на множестве $B \in \mathcal{B}$ называется*

$$V_L(B) = \sup_{\delta \in \Delta(B)} V_{L\delta}(B).$$

В частности, полная вариация L есть

$$V_L = V_L(\mathcal{X}).$$

Определение 1.21 *Обобщенной мерой на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ называется σ - аддитивная функция множества на $\mathcal{B}$, имеющая конечную полную вариацию: $V_L < \infty$.*

Обозначим $\mathcal{L}$ совокупность всех обобщенных мер на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Вводя в $\mathcal{L}$ естественные операции сложения элементов $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 + L_2)(B) = L_1(B) + L_2(B), \quad B \in \mathcal{B},$$

и умножения элемента $L \in \mathcal{L}$ на вещественное число $a \in \mathbf{R}$

$$(aL)(B) = aL(B), \quad B \in \mathcal{B},$$

превращаем $\mathcal{L}$ в линейное пространство. Нетрудно заметить, что V_L задает в этом пространстве норму

$$\|L\| = V_L,$$

относительно которой $\mathcal{L}$ является банаховым. Совокупность вероятностных распределений $\mathcal{P}$ является подмножеством $\mathcal{L}$, описываемым условиями

$$\mathcal{P} = \{L \in \mathcal{L} |\ L(B) \geq 0,\ B \in \mathcal{B};\ \ V_L = 1\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{P}$ образует в $\mathcal{L}$ выпуклое множество.

Пусть $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$ – выпуклое подмножество. Введем понятие выпуклого функционала на $\mathcal{F}$.

Определение 1.22 *Функционал $\mu :\ \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ называется выпуклым по распределению, если для произвольных $F, G \in \mathcal{F}$ и произвольного $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$\mu(\lambda F + (1 - \lambda)G) \leq \lambda\mu(F) + (1 - \lambda)\mu(G). \tag{1.24}$$

Функционал μ называется *вогнутым* по распределению, если знак неравенства в (1.24) заменен на противоположный. *Строго* выпуклый (вогнутый) функционал μ определяется с помощью (1.24) со строгим неравенством.

Введем еще два тестовых распределения.

Определение 1.23 *Распределение $P \in \mathcal{P}$ называется вырожденным в точке $x \in \mathcal{X}$, если $P(\{x\}) = 1$. Для распределения, вырожденного в точке x будем использовать обозначение W_x.*

Определение 1.24 *Для заданных $x, y \in \mathcal{X}$ и $p \in [0, 1]$ распределением Бернулли называется двуатомическое распределение $B_{x,y,p}$: $B_{x,y,p}(\{x\}) = 1 - p$, $B_{x,y,p}(\{y\}) = p$. В частности, если $\mathcal{X} = \mathbf{R}$, $x = 0$, $y = 1$, то $B_{0,1,p} = B_p$ представляет собой обычное распределение Бернулли.*

1.5 Распределения на упорядоченных множествах

Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, и пусть множество $\mathcal{X}$ частично упорядочено некоторым отношением порядка $\leq$, а $\mathcal{B}$ является борелевской σ-алгеброй, то есть σ-алгеброй, порожденной интервалами вида (1.2) – (1.5). Будем называть такой объект *упорядоченным измеримым пространством*, а σ-алгебру $\mathcal{B}$ – *порядковой*. Функцией распределения $F = F_P$, соответствующей распределению $P \in \mathcal{P}$, называется функция вида

$$F(x) = F_P(x) = P((\leftarrow, x]),\ \ x \in \mathcal{X}. \tag{1.25}$$

Функция распределения является, очевидно, неотрицательной, неубывающей относительно частичного порядка на $\mathcal{X}$: $x < y$ влечет $F(x) \leq F(y)$, и

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} F(x) = 1. \tag{1.26}$$

Каждое распределение на упорядоченном измеримом пространстве однозначно определяет функцию распределения, однако обратное, вообще говоря, неверно: некоторым функциям распределения может соответствовать более одного вероятностного распределения. В последнем случае затруднительно использование функции распределения в качестве аналитического инструмента. Условимся называть упорядоченные измеримые пространства, на которых существует взаимно-однозначное соответствие между вероятностными распределениями и функциями распределения, *простыми*, и всюду далее будем рассматривать только простые упорядоченные измеримые пространства. Полная характеризация класса простых упорядоченных измеримых пространств выходит за рамки настоящей работы; здесь мы приведем лишь примеры таких пространств.

Простейшим примером такого рода является конечное линейно упорядоченное множество. Менее тривиальный пример описывает следующее

Предложение 1.25 *Пусть $(\mathcal{X}, \leq)$ есть вещественно-подобное упорядоченное множество (см. определение 1.4), а $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ – соответствующее упорядоченное измеримое пространство. Тогда $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ является простым.*

Доказательство. По предложению (1.5) множество $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ порядково подобно множеству вещественных чисел $\mathbf{R}$ или сегменту $[0, 1]$. Нетрудно убедиться в том, что подобие f устанавливает также взаимно-однозначное соответствие между σ-алгеброй $\mathcal{B}$ и обычной борелевской σ-алгеброй на $\mathbf{R}$ ($[0, 1]$), поэтому требуемый результат вытекает из аналогичного утверждения для $\mathbf{R}$ (см., например, [14]). $\diamond$

Используя тот же прием, что и при построении борелевской σ-алгебры в $\mathbf{R}^n$, нетрудно убедиться в том, что декартово произведение $\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$ вещественно-подобных упорядоченных множеств с покоординатным отношением частичного порядка также образует простое упорядоченное измеримое пространство.

Введем теперь понятие двойственного распределения.

Определение 1.26 *Пусть s – некоторый реверс множества $\mathcal{X}$, а $P \in \mathcal{P}$ – распределение на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Двойственным к P называется распределение*

$$P^c(B) = P(s(B)), \; B \in \mathcal{B}. \tag{1.27}$$

Предложение 1.27 *Если s – симметричный реверс $\mathcal{X}$, то $(P^c)^c = P$.*

Доказательство вытекает из соотношения $s(s(B)) = B,\ B \in \mathcal{B}$, справедливого для симметричного реверса. $\diamond$

Порядок, заданный на $\mathcal{X}$, естественным образом порождает на множестве распределений $\mathcal{P}$ частичный порядок, называемый стохастическим доминированием (см., например, [45]).

Определение 1.28 *Пусть $P, Q \in \mathcal{P}$ – вероятностные распределения. Говорят, что P стохастически доминирует Q, (обозначается $P \geq_s Q$) если*

$$P((\leftarrow, x]) \leq Q((\leftarrow, x]),\ \ x \in \mathcal{X}. \tag{1.28}$$

В терминах функций распределения это определение переписывается в виде

$$F_P(x) \leq F_Q(x),\ \ x \in \mathcal{X}. \tag{1.29}$$

В следующем предложении устанавливается связь понятий стохастического доминирования и двойственного распределения на простых пространствах.

Предложение 1.29 *Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ – вещественно-подобное измеримое пространство. Тогда $P \geq_s Q \iff P^c \leq_s Q^c$.*

Доказательство. Действительно, ввиду (1.18) неравенство

$$P((\leftarrow, x]) \leq Q((\leftarrow, x]),\ x \in \mathcal{X}$$

влечет

$$P^c([y, \rightarrow)) \leq Q^c([y, \rightarrow)),\ y \in \mathcal{X}. \tag{1.30}$$

Далее, поскольку $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ является вещественно-подобным, для любого интервала $B = (y, \rightarrow)$ существует последовательность $z_k \in B$, кофинальная с B, то есть $z_1 > z_2 > \ldots$ и для любого $z \in B$ найдется номер $k > 0$ такой, что $z_k < z$. Отсюда вытекает, что возрастающая последовательность интервалов $B_k = [z_k, \rightarrow)$ исчерпывает B:

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \lim_{k\to\infty} B_k,$$

так что

$$P^c((y, \rightarrow)) = \lim_{k\to\infty} P^c([z_k, \rightarrow)),\ Q^c((y, \rightarrow)) = \lim_{k\to\infty} Q^c([z_k, \rightarrow)),$$

что вместе с (1.30) влечет

$$P^c((y, \rightarrow)) \leq Q^c((y, \rightarrow)),\ y \in \mathcal{X},$$

откуда

$$P^c((\leftarrow, y]) \geq Q^c((\leftarrow, y]),\ y \in \mathcal{X},$$

то есть $P^c \leq_s Q^c$, что и требовалось. $\diamond$

1.6 Порядки на множестве распределений

Пусть $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, образованное множеством вещественных чисел с борелевской σ-алгеброй, $\mathcal{P}$ – множество всех вероятностных распределений на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$. Будем обозначать F_P функцию распределения, соответствующую распределению $P \in \mathcal{P}$, $\mathbf{E}_P$ – математическое ожидание всякой случайной величины, имеющей это распределение, $\widetilde{\mathcal{P}}$ – совокупность всех распределений из $\mathcal{P}$, имеющих конечное математическое ожидание $\mathbf{E}_P$, а $\widetilde{\mathcal{P}}_0 \subseteq \widetilde{\mathcal{P}}$ – подмножество распределений P, сосредоточенных на положительной полуоси: $P([0, \infty)) = 1$. Будем использовать также обозначения $\mathcal{F}$ для совокупности всевозможных функций распределения и $\widetilde{\mathcal{F}}$ для совокупности функций распределения с конечным математическим ожиданием. В определении 1.28 введено понятие стохастического доминирования. Отметим здесь, что

$$P \leq_s Q \implies F_P^{-1}(v) \leq F_Q^{-1}(v),\ v \in [0, 1], \tag{1.31}$$

и рассмотрим другие порядки на множестве распределений.

Определение 1.30 *Пусть $P, Q \in \widetilde{\mathcal{P}}$. Говорят, что P не лучше Q в смысле неприятия риска (обозначается $P \leq_a Q$), если $Q = W_r$, то есть представляет собой распределение, вырожденное в некоторой точке $r \in \mathbf{R}$, и $\mathbf{E}_P = r$.*

Определение 1.31 *Пусть $P, Q \in \widetilde{\mathcal{P}}_0$. Говорят, что P не более опасно, чем Q (обозначается $P \leq_d Q$), если $\mathbf{E}_P \leq \mathbf{E}_Q$ и существует точка $c \in \mathbf{R}_+$ такая, что*

$$F_P(x) \leq F_Q(x),\ x < c,$$
$$F_P(x) \geq F_Q(x),\ x \geq c,$$

Докажем несколько полезных лемм.

Лемма 1.32 *Математическое ожидание $\mathbf{E}_F$ распределения $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$ может быть представлено в виде*

$$\mathbf{E}_F = \int_0^1 F^{-1}(v)\, dv. \tag{1.32}$$

Доказательство. Одним из вариантов представления случайной величины, имеющей функцию распределения F, является следующее представление. Рассмотрим вероятностное пространство $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, где $\mathcal{B}_{[0,1]}$ – борелевская σ-алгебра на отрезке $[0, 1]$, а λ – мера Лебега. Тогда отображение

$$X(\omega) = F^{-1}(\omega),\ \omega \in [0, 1]$$

является измеримым, и задает случайную величину, функция распределения которой совпадает с F. Математическое ожидание случайной величины X, равное по определению

$$\mathbf{E}X = \int_{[0,1]} X(\omega)\, d\lambda(\omega),$$

есть, очевидно, просто другая форма записи (1.32). $\diamond$

С помощью того же приема доказывается следующее обобщение леммы 1.32.

Лемма 1.33 *Математическое ожидание функции* $\mathbf{E}h(X)$ *от случайной величины, имеющей функцию распределения* F, *может быть вычислено по формуле*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dF(x) = \int_0^1 h(F^{-1}(v))\, dv. \tag{1.33}$$

Лемма 1.34 *Математическое ожидание* $\mathbf{E}_F$ *распределения* $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$ *может быть представлено в виде*

$$\mathbf{E}_F = \int_{-\infty}^{0} (-F(x))\, dx + \int_0^{\infty} (1 - F(x))\, dx \tag{1.34}$$

Доказательство. Отметим сначала, что ввиду конечности математического ожидания

$$\mathbf{E}_F = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)$$

хвосты этого интеграла стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{x} y\, dF(y) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \int_{x}^{\infty} y\, dF(y) = 0.$$

Далее,

$$\mathbf{E}_F = \int_{-\infty}^{0} x\, dF(x) + \int_0^{\infty} x\, dF(x).$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_{-\infty}^{0} x\, dF(x) = xF(x)|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} F(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{0} F(x)\, dx,$$

и

$$\int_0^{\infty} x\, dF(x) = -\int_0^{\infty} x\, d(1 - F(x)) =$$
$$-x(1 - F(x))|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (1 - F(x))\, dx = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\, dx.$$

Складывая два последних равенства, получаем требуемое. $\diamond$

Связь порядков стохастического доминирования и опасности устанавливает следующая

Лемма 1.35 *Если $P, Q \in \widetilde{\mathcal{P}}_0$, то $P \leq_s Q$ влечет $P \leq_d Q$.*

Доказательство. Действительно, в силу леммы 1.32 и (1.31) отношение стохастического доминирования влечет $\mathbf{E}_P \leq \mathbf{E}_Q$. Неравенства из определения 1.31 выполняются при $c = 0$. $\diamond$

Определение 1.36 *Пусть $P, Q \in \widetilde{\mathcal{P}}_0$. Говорят, что $P \leq_{sl} Q$ (распределение P не превосходит Q в смысле порядка стоп-лосс, см. [45]), если*

$$\int_x^\infty (1 - F_P(y))\, dy \leq \int_x^\infty (1 - F_Q(y))\, dy, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1.35}$$

Связь между последними двумя порядками устанавливает следующее

Предложение 1.37 *([140]). $P \leq_{sl} Q$ в том и только в том случае, когда существуют распределения $P_1, \ldots, P_n$ такие, что*

$$P \leq_d P_1 \leq_d \ldots \leq_d P_n \leq_d Q.$$

Отметим, в частности, что $P \leq_d Q \implies P \leq_{sl} Q$.

Докажем здесь еще одну простую лемму.

Лемма 1.38 *Функционал $\mu:\ \widetilde{\mathcal{P}}_0 \to \mathbf{R}$ монотонен относительно порядка опасности в том и только в том случае, когда он монотонен в том же смысле относительно порядка стоп-лосс.*

Доказательство. Пусть μ является неубывающим функционалом относительно порядка опасности, и $P \leq_{sl} Q$. Тогда, используя цепочку распределений из предложения 1.37, получим

$$\mu(P) \leq \mu(P_1) \leq \ldots \leq \mu(P_n) \leq \mu(Q),$$

что и означает неубывание μ относительно порядка стоп-лосс. Обратная импликация тривиальна, поскольку ввиду предложения 1.37 порядок опасности является частным случаем порядка стоп-лосс. Для невозрастающих функционалов доказательство аналогично. $\diamond$

Связь монотонности относительно порядков опасности и стохастического доминирования устанавливает следующая

Лемма 1.39 *Всякий функционал $\mu:\ \widetilde{\mathcal{P}}_0 \to \mathbf{R}$, монотонный относительно отношения опасности, монотонен в том же смысле и относительно стохастического доминирования.*

Доказательство. Доказательство для неубывающих функционалов, с учетом леммы 1.35, вытекает из цепочки соотношений

$$P \leq_s Q \implies P \leq_d Q \implies \mu(P) \leq \mu(Q).$$

Случай невозрастающих функционалов рассматривается аналогично. $\diamond$

Объединяя утверждения лемм 1.38 и 1.39, получаем

Предложение 1.40 *Функционал $\mu : \widetilde{\mathcal{P}}_0 \to \mathbf{R}$, являющийся монотонным относительно стохастического доминирования, является также монотонным относительно порядков опасности и стоп-лосс. Функционал $\nu : \widetilde{\mathcal{P}}_0 \to \mathbf{R}$, не являющийся монотонным относительно порядка опасности, не является монотонным и относительно порядков стохастического доминирования и стоп-лосс.*

Глава 2

Теория риска

В настоящей главе теория риска описывается, как инструмент для задач принятия решений в условиях вероятностной неопределенности. В параграфе 2.1 приводится постановка задачи принятия решений и приводится пример – задача портфельного анализа. В следующем параграфе описываются некоторые известные меры риска. Параграф 2.3 посвящен исследованию монотонности введенных мер риска относительно обычных частичных порядков на множестве распределений, а параграф 2.4 – изучению их выпуклости. Свойства монотонности и выпуклости важны для правильной постановки задач принятия решений, как задач оптимизации. В последнем параграфе приводятся явные выражения для вычисления некоторых мер риска с помощью техники дискретизации.

2.1 Задача принятия решений

Пусть случайное состояние среды описывается вероятностным пространством $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, а множество результатов $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ наделено структурой измеримого пространства. Обозначим $\mathcal{D}$ множество решений (действий), тогда получение результата $r \in \mathcal{R}$ при принятии решения $d \in \mathcal{D}$ и состоянии среды $s \in \mathcal{S}$ можно представить в виде $r = \xi(d, s)$, где отображение $\xi : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ предполагается измеримым относительно пары σ-алгебр $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ при каждом фиксированном $d \in \mathcal{D}$. При этом отображение $\xi_d = \xi(d, \cdot) : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ образует случайный элемент, который порождает на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ распределение P_d по правилу

$$P_d(B) = \mathbf{P}(\xi_d^{-1}(B)),\ B \in \mathcal{B}.$$

Таким образом, каждое решение $d \in \mathcal{D}$ приводит к некоторому распределению P_d на множестве результатов. Выбор наилучшего решения при этом означает выбор "наилучшего"распределения в классе распределений $\mathcal{F} = \{P_d,\ d \in \mathcal{D}\}$, содержащемся в классе $\mathcal{P}$ всевозможных распределений на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$.

Мы будем считать, что на $\mathcal{F}$ задано отношение предпочтения $\preceq$, и понимать термин "наилучший"в смысле "наиболее предпочтительный". При этом задача принятия решения может быть сформулирована, как задача поиска наибольшего элемента в множестве с предпочтениями $(\mathcal{F}, \preceq)$: найти распределение $\overline{F} \in \mathcal{F}$ такое, что

$$F \preceq \overline{F}, \quad F \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Если на $(\mathcal{F}, \preceq)$ задан монотонный функционал, то задача выбора наилучшего распределения сводится к задаче оптимизации

$$\mu(F) \longrightarrow \max_{F \in \mathcal{F}} \ (\min_{F \in \mathcal{F}}), \tag{2.2}$$

в частности, задача принятия решения (2.1) принимает вид

$$\mu(P_d) \longrightarrow \max_{d \in \mathcal{D}} \ (\min_{d \in \mathcal{D}}). \tag{2.3}$$

Возможно также непосредственное задание некоторого функционала на $\mathcal{F}$, который порождает отношение предпочтения (см. предложение 1.9). Такой подход и используется чаще всего в задачах принятия решений.

Рассмотрим следующий пример, известный как задача размещения ресурсов или задача портфельного анализа. Пусть имеется капитал K, который можно разместить (инвестировать) в n ресурсов. Каждый из ресурсов при помещении в него капитала K целиком приносит доход (или прибыль) X_i, $i = 1, \ldots, n$, причем величина этого дохода не может быть предсказана точно, и представляет собой случайную величину. Если в i-й ресурс вложен не весь капитал K, а лишь его доля $y_i K$, то доход от вложения описывается функцией $f_i(y_i, X_i)$, такой, что $f_i(1, X_i) = X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Функции f_i часто можно считать линейными: $f_i(y_i, X_i) = y_i X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Состояние среды s описывается в этом примере случайным вектором $X = (X_1, \ldots, X_n)$, так что в вероятностном пространстве $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ множество состояний $\mathcal{S}$ есть подмножество в $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{A}$ – борелевская σ-алгебра подмножеств $\mathcal{S}$, а $\mathbf{P}$ – совместное распределение случайного вектора X. Решение d заключается в назначении долей y_i, $i = 1, \ldots, n$, вкладываемых в соответствующие ресурсы, и описывается вектором $d = (y_1, \ldots, y_n)$, лежащем в множестве

$$L_n = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n |\ y_1 + \ldots + y_n = 1\}.$$

Множество решений $\mathcal{D}$ совпадает с L_n, или является его подмножеством, если на решение накладываются какие-либо дополнительные ограничения. Так, например, во многих случаях назначение отрицательной доли лишено смысла, поэтому все доли $y_i, i = 1, \ldots, n$ предполагаются неотрицательными, при этом множество решений оказывается стандартным симплексом $\mathbf{R}^n$:

$$\mathcal{D} = \{d = (y_1, \ldots, y_n) \in L_n | \ y_1 \geq 0, \ldots y_n \geq 0\}.$$

Результатом решения $d \in \mathcal{D}$ является совокупный доход, равный

$$\xi(d, s) = f_1(y_1, X_1) + \ldots f_n(y_n, X_n), \tag{2.4}$$

или, в линейном случае,

$$\xi(d, s) = y_1 X_1 + \ldots y_n X_n. \tag{2.5}$$

Множество результатов $\mathcal{R}$ при этом лежит в $\mathbf{R}$ и совпадает с множеством всех значений функции (2.4) или (2.5), а $\mathcal{B}$ есть борелевская σ-алгебра подмножеств $\mathcal{R}$. При фиксированном решении $d \in \mathcal{D}$ результат (2.4) или (2.5) оказывается случайной величиной, и задача принятия решения сводится к выбору решения $d \in \mathcal{D}$, приводящего к результату с "наилучшим"распределением.

2.2 Меры риска

Введем в рассмотрение некоторые известные меры риска, определенные для вещественных распределений. Пусть $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{R}$ – некоторое множество вещественных чисел, $\mathcal{B}$ – обычная борелевская σ-алгебра. Распределения на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ в этом случае могут быть описаны функциями распределения (1.25), поэтому можно сразу считать, что $\mathcal{F}$ является совокупностью функций распределения на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$.

Выпишем вид функций распределения для вырожденного и бернуллиевского распределений, введенных в 1.4. Функция вырожденного распределения W_a имеет вид

$$W_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a, \end{cases} \tag{2.6}$$

а функция бернуллиевского распределения $B_{a,b,p}$ для $a < b \in \mathcal{R}$, $p \in [0, 1]$:

$$B_{a,b,p}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 - p, & a \leq x < b, \\ 1, & b \leq x. \end{cases} \tag{2.7}$$

В частности, при $a = 0$, $b = 1$ получается обычная функция распределения Бернулли, которую будем обозначать B_p.

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ состоит из функций распределения, обладающих конечным первым моментом. Тогда *математическое ожидание*

$$\varepsilon(F) = \int_{\mathcal{R}} x \, dF(x) \tag{2.8}$$

определяет функционал на $\mathcal{F}$. Этот функционал принимает на тестовых распределениях (2.6) и (2.7) значения

$$\varepsilon(W_a) = a; \quad a \in \mathcal{R},$$

$$\varepsilon(B_{a,b,p}) = pb + (1-p)a; \quad a, b \in \mathcal{R},\ a < b,\ p \in [0,1].$$

Если $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$ есть множество распределений на $\mathcal{R}$, обладающих конечным вторым моментом, то *дисперсия* распределения

$$\delta(F) = \int_{\mathcal{R}} (x - \varepsilon(F))^2 \, dF(x) \tag{2.9}$$

также задает функционал на $\mathcal{F}$. Ее значения на тестовых распределениях есть

$$\delta(W_a) = 0; \quad a \in \mathcal{R},$$

$$\delta(B_{a,b,p}) = p(1-p)(b-a)^2; \quad a, b \in \mathcal{R},\ a < b,\ p \in [0,1].$$

Нам понадобится также смешанный функционал вида

$$\theta(F) = \theta_\beta(F) = \beta\delta(F) - \varepsilon(F), \quad F \in \mathcal{F}_2, \tag{2.10}$$

где $\beta > 0$ – параметр функционала.

Пусть $U : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ – вещественная функция. На основе теории, развитой в [15], была получена мера риска

$$\rho(F) = \int_{\mathcal{R}} U(x) \, dF(x), \tag{2.11}$$

которая задает функционал на множестве всех распределений $\mathcal{F}$, для которых этот интеграл сходится. Область сходимости определяется свойствами функции U. Значения этой меры риска на тестовых распределениях равны

$$\rho(W_a) = U(a); \quad a \in \mathcal{R}, \tag{2.12}$$

$$\rho(B_{a,b,p}) = (1-p)U(a) + pU(b); \quad a, b \in \mathcal{R},\ a < b,\ p \in [0,1]. \tag{2.13}$$

Пусть $\mathcal{R} = \mathbf{R}_+$, а $g : \ [0,1] \to [0,1]$ – неубывающая вещественная функция, удовлетворяющая условиям

$$g(0) = 0, \ g(1) = 1. \tag{2.14}$$

В [140] была предложена мера риска

$$\pi(F) = \int_0^\infty g(1 - F(x)) \, dx, \tag{2.15}$$

которая задает функционал на множестве всех распределений, для которых этот интеграл сходится. Область сходимости $\mathcal{F}_g$ этой меры риска определяется поведением функции g в окрестности нуля. Обозначим $\mathcal{F}_{1+}$ совокупность функций распределения на $[0, \infty)$ с конечным математическим ожиданием, и приведем один результат, описывающий область существования π.

Предложение 2.1 *Пусть $0 < g'(0) < \infty$. Тогда область сходимости (2.15) совпадает с $\mathcal{F}_{1+}$.*

Доказательство. Ввиду $g'(0) < \infty$ существуют постоянные $0 < a, M < \infty$ такие, что $g(v) \le Mv$ при $v \in [0, a]$. Пусть $F \in \mathcal{F}_{1+}$, то есть $\mathbf{E}_F$ конечно. Обозначим

$$A = \sup\{x \in \mathbf{R}_+ : \ F(x) < 1 - a\}. \tag{2.16}$$

При этом

$$\pi(F) = \int_0^A g(1 - F(x))\, dx + \int_A^\infty g(1 - F(x))\, dx \le A + M\mathbf{E}_F < \infty.$$

Пусть теперь $\pi(F) < \infty$, покажем, что $F \in \mathcal{F}_{1+}$. Ввиду $g'(0) > 0$ найдутся $0 < a, m < \infty$ такие, что $g(v) \ge mv$ при $v \in [0, a]$. Используя снова обозначение (2.16), получаем

$$\pi(F) = \int_0^A g(1 - F(x))\, dx + \int_A^\infty g(1 - F(x))\, dx \ge m \int_A^\infty (1 - F(x))\, dx,$$

что в силу леммы 1.34 означает конечность $\mathbf{E}_F$. $\diamond$

Замечание 2.2 *Если $g'(0) = \infty$, то, как видно из доказательства, для некоторых распределений $F \in \mathcal{F}_{1+}$ функционал 2.15 может не существовать. Если же $g'(0) = 0$, то область сходимости 2.15 оказывается шире $\mathcal{F}_{1+}$.*

На тестовых распределениях π принимает значения

$$\pi(W_a) = a; \ \ a \in \mathbf{R}_+, \tag{2.17}$$

$$\pi(B_{a,b,p}) = a + (b - a)g(p); \ \ a, b \in \mathcal{R},\ a < b,\ p \in [0, 1], \tag{2.18}$$

в частности, для стандартного распределения Бернулли

$$\pi(B_p) = g(p); \ \ p \in [0, 1]. \tag{2.19}$$

Опишем здесь некоторые свойства π, считая ее заданной на $\mathcal{X}$.

Предложение 2.3 *Для фиксированного $a > 0$ и произвольного $X \in \mathcal{X}$ выполняется $\pi(X + a) = \pi(X) + a$, $\pi(aX) = a\pi(X)$.*

Доказательство. Заметим, что если X имеет функцию распределения F_X, то $F_{X+a}(x) = F_X(x-a)$, $x \in \mathbf{R}_+$ и $F_{aX}(x) = F_X(x/a)$, $x \in \mathbf{R}_+$, поэтому

$$\pi(X+a) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x-a))\,dx = \int_0^a 1\,dx + \int_a^\infty g(1-F_X(x-a))\,dx$$
$$= a + \int_0^\infty g(1-F_X(y))\,dy = a + \pi(X)$$

и

$$\pi(aX) = \int_0^\infty g(1-F_X(x/a))\,dx = a\int_0^\infty g(1-F_X(y))\,dy = a\pi(X). \ \diamond$$

Вариантом меры риска (2.15) является мера "значение под риском"или VaR (Value-at-Risk), которая определяется как квантиль Q_α распределения заданного уровня $\alpha \in (0,1)$:

$$\nu(F) = \sup\{x \in \mathbf{R} |\ F(x) < \alpha\},$$

и может быть задана также выражением (2.15) с функцией $g = g_\alpha$ вида

$$g_\alpha(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le \alpha, \\ 1, & \alpha < v \le 1. \end{cases}$$

2.3 Монотонность мер риска

Определение 2.4 *Пусть на множестве $\mathcal{X}$ задано отношение частичного порядка $\le$ и отношение предпочтения $\preceq$. Скажем, что $\preceq$ является продолжением порядка $\le$, если $x \le y \implies x \preceq y$ для $x, y \in \mathcal{X}$.*

Для того, чтобы мера риска была монотонной относительно отношения предпочтения, она должна быть монотонной и относительно любого порядка, продолжением которого является данное предпочтение, как показывает следующее простое

Предложение 2.5 *Если мера риска μ монотонна относительно отношения предпочтения $\preceq$, а последнее является продолжением отношения порядка $\le$, то μ монотонна и относительно $\le$.*

Доказательство вытекает из следующей логической цепочки:

$$x \le y \implies x \preceq y \implies \mu(x) \le \mu(y), \quad x, y \in \mathcal{X}. \diamond$$

Таким образом, важно умение определять монотонность мер риска относительно различных отношений частичного порядка. Далее будет изучена монотонность мер риска, введенных в параграфе 2.2 относительно отношений порядка из параграфа 1.6.

Введем определения выпуклой и вогнутой функций.

Определение 2.6 *Функция $f : A \to \mathbf{R}$, заданная на выпуклом множестве $A \subseteq \mathbf{R}$, называется выпуклой, если для произвольных $x, y \in A$ и любого $\alpha \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \tag{2.20}$$

Функция f называется *вогнутой*, если в (2.20) выполняется противоположное неравенство. Если неравенство в (2.20) строгое, то говорят о *строго* выпуклой (вогнутой) функции.

2.3.1 Математическое ожидание и дисперсия

Предложение 2.7 *Мера риска ε является неубывающей относительно стохастического доминирования, неприятия риска, отношения опасности и порядка стоп-лосс.*

Доказательство. Пусть $F, G \in \mathcal{F}_1$ и $F \leq_s G$, то есть $F(x) \geq G(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Тогда, очевидно, $F^{-1}(v) \leq G^{-1}(v)$, $v \in (0, 1)$, откуда, по лемме 1.32, вытекает $\mathbf{E}_F \leq \mathbf{E}_G$, что означает монотонность ε относительно стохастического доминирования.

Монотонность ε относительно порядков неприятия риска и опасности вытекает непосредственно из определения этих порядков, а монотонность относительно порядка стоп-лосс – из леммы 1.38. $\diamond$

Предложение 2.8 *Дисперсия δ является невозрастающей мерой риска относительно порядка неприятия риска, и не является монотонной относительно других рассматриваемых порядков.*

Доказательство. Утверждение о монотонности δ относительно $\leq_a$ тривиально, поскольку $P \leq_a Q$ означает в частности, что распределение Q вырождено, так что $\delta(Q) = 0$, тогда как $\delta(P) \geq 0$. Для доказательства отсутствия монотонности в остальных случаях достаточно привести контрпримеры.

Для отношения стохастического доминирования контрпримером может служить набор распределений $W_0, B_{1/2}, W_1$, которые расположены по стохастическому доминированию в следующем порядке: $W_0 \leq_s B_{1/2} \leq_s W_1$, но $\delta(W_0) = \delta(W_1) = 0$, $\delta(B_{1/2}) = 1/4$. С учетом предложения 1.40 отсюда вытекает отсутствие монотонности δ в смысле порядков опасности и стоп-лосс. $\diamond$

Предложение 2.9 *Смешанный функционал θ_β (2.10) является невозрастающим относительно неприятия риска и не является монотонным относительно остальных порядков.*

Доказательство. Монотонность θ_β относительно неприятия риска очевидна. Для доказательства отсутствия монотонности относительно остальных порядков, достаточно, как и в предыдущем предложении, привести контрпример для стохастического доминирования.

Пусть значение параметра $\beta > 0$ фиксировано. Рассмотрим распределения $W_0, B_{0,2/\beta,1/4}, W_{2/\beta}$. Очевидно, $W_0 \leq_s B_{0,2/\beta,1/4} \leq_s W_{2/\beta}$. Вычисляя значения θ_β на этих распределениях, получаем

$$\theta_\beta(W_0) = 0, \;\; \theta_\beta(W_{2/\beta}) = -2/\beta, \;\; \theta_\beta(B_{0,2/\beta,1/4}) = 1/(4\beta) > 0,$$

так что $\theta_\beta(W_0) < \theta_\beta(B_{0,2/\beta,1/4}) > \theta_\beta(W_{2/\beta})$, что и означает отсутствие монотонности θ_β относительно стохастического доминирования. $\diamond$

2.3.2 Мера ожидаемой полезности

Изучим теперь монотонность функционала ожидаемой полезности. Обозначим $\mathcal{F}_U \subseteq \mathcal{F}$ совокупность функций распределения F, для которых интеграл (2.11) сходится.

Нам потребуется следующая

Лемма 2.10 *[3]. Пусть* $\mathbf{E}_F$ *конечно. Для выпуклой функции* U *справедливо неравенство* $U(\mathbf{E}_F) \leq \rho(F)$*, а для вогнутой:* $U(\mathbf{E}_F) \geq \rho(F)$.

Предложение 2.11 *Мера риска* $\rho : \mathcal{F}_U \to \mathbf{R}$ *является неубывающей (невозрастающей) относительно порядка неприятия риска в том и только в том случае, когда функция* U *вогнута (выпукла).*

Доказательство. Пусть функция U вогнута и $F \leq_a G$. Последнее означает, что G является вырожденной функцией распределения с единичным скачком в точке $\mathbf{E}_F$, поэтому лемма 2.10 дает $\rho(G) = U(\mathbf{E}_F) \geq \rho(F)$, то есть ρ не убывает.

Пусть теперь ρ является неубывающей относительно $\leq_a$, то есть,

$$\rho(F) \leq U(\mathbf{E}_F), \; F \in \mathcal{F}_U. \tag{2.21}$$

Для доказательства вогнутости U рассмотрим распределение Бернулли $B_{a,b,p}$ при произвольных фиксированных $a < b$. Вычисляя его математическое ожидание $\mathbf{E}_{B_{a,b,p}} = (1-p)a + pb$ и значение ρ на этом распределении: $\rho(B_{a,b,p}) = (1-p)U(a) + pU(b)$, и подставляя результаты в (2.21), получаем:

$$(1-p)U(a) + pU(b) \leq U((1-p)a + pb), \; p \in [0, 1],$$

что по определению и означает вогнутость U.

Случай выпуклой U рассматривается аналогично. $\diamond$

Предложение 2.12 *Мера риска $\rho : \mathcal{F}_U \to \mathbf{R}$ является неубывающей (невозрастающей) относительно стохастического доминирования в том и только в том случае, когда функция U является неубывающей (невозрастающей).*

Доказательство. Пусть U является неубывающей. Рассмотрим произвольные $F, G \in \mathcal{F}_U$, связанные соотношением $F \leq_s G$, и покажем, что $\rho(F) \leq \rho(G)$. Стохастическое доминирование по определению означает $F(x) \geq G(x),\ x \in \mathcal{R}$, откуда вытекает $F^{-1}(v) \leq G^{-1}(v),\ v \in [0,1]$, так что, используя лемму 1.33, получаем с учетом монотонности U:

$$\rho(F) = \int_{\mathcal{R}} U(x)\, dF(x) = \int_0^1 U(F^{-1}(v))\, dv \leq \int_0^1 U(G^{-1}(v))\, dv = \rho(G),$$

что и требовалось.

Пусть теперь мера ρ является неубывающей относительно стохастического доминирования: $F \leq_s G \implies \rho(F) \leq \rho(G)$. Покажем, что функция U является неубывающей. Для этого рассмотрим произвольные $a < b$ из $\mathcal{R}$ и соответствующие вырожденные функции распределения F_a, F_b. Поскольку $F_a \leq_s F_b$, должно быть $\rho(F_a) \leq \rho(F_b)$, а последнее ввиду (2.12) означает $U(a) \leq U(b)$, что и требовалось.

Случай неубывающих U и ρ рассматривается аналогично. $\diamond$

Предложение 2.13 *Если U является неубывающей и выпуклой, то мера риска $\rho : \mathcal{F}_U \to \mathbf{R}$ является неубывающей относительно порядков опасности и стоп-лосс.*

Доказательство для порядка стоп-лосс приведено в [45], теорема 2.2, а для порядка опасности вытекает из предыдущего и леммы 1.38. $\diamond$

2.3.3 Мера возмущенной вероятности

Изучим теперь монотонность меры возмущенной вероятности π.

Предложение 2.14 *Мера риска $\pi : \mathcal{F}_g \to \mathbf{R}$ является неубывающей (невозрастающей) относительно порядка неприятия риска $\leq_a$ тогда и только тогда, когда $g(v) \leq v$ ($g(v) \geq v$), $v \in [0,1]$.*

Доказательство. Пусть $g(v) \leq v,\ v \in [0,1]$ и $F \in \mathcal{F}_g$. Тогда

$$\pi(F) = \int_0^\infty g(1 - F(x))\, dx \leq \int_0^\infty (1 - F(x)\, dx = \mathbf{E}_F,$$

что и означает монотонность π относительно $\leq_a$. Пусть теперь π является неубывающей относительно $\leq_a$: $\pi(F) \leq \pi(\mathbf{E}_F)$, $F \in \mathcal{F}_g$. Рассмотрим распределения Бернулли B_p, $p \in [0,1]$, имеем: $\mathbf{E}_{B_p} = p$, $\pi(B_p) = g(p)$ поэтому монотонность π означает $g(p) \leq p$, $p \in [0,1]$, что и требовалось. Случай невозрастающей π рассматривается аналогично. $\diamond$

Рассмотрим теперь монотонность π относительно других порядков. Сначала отметим, что эта мера риска не может оказаться убывающей относительно стохастического доминирования, а также порядков опасности и стоп-лосс ввиду очевидного равенства $\pi(B_a) = g(a)$, $a \in [0,1]$ и монотонности функции g.

Предложение 2.15 *Мера риска $\pi : \mathcal{F}_g \to \mathbf{R}$ является неубывающей относительно порядка стохастического доминирования.*

Доказательство сводится к применению монотонности функции g:

$$F \leq_s G \iff F(x) \geq G(x),\ x \in \mathbf{R}_+ \implies$$
$$\pi(F) = \int_0^\infty g(1 - F(x))\,dx \leq \int_0^\infty g(1 - G(x))\,dx = \pi(G).\ \diamond$$

Предложение 2.16 *Мера риска $\pi : \mathcal{F}_g \to \mathbf{R}$ является неубывающей относительно порядка опасности (стоп-лосс) тогда и только тогда, когда функция g является вогнутой.*

Замечание 2.17 *Утверждение о достаточности выпуклости g для монотонности π было сформулировано и доказано в [140] (теорема 1), однако приведенное там доказательство содержит ошибку. Эта ошибка была отмечена в [96]; там же приведено правильное доказательство в предположении дифференцируемости функции g. Здесь приводится правильное доказательство достаточности в исходной формулировке, а также показывается необходимость сформулированного условия.*

Сформулируем предварительно одну лемму.

Лемма 2.18 *([124]). Пусть функция $g:\ A \to \mathbf{R}$, заданная на выпуклом множестве $A \subseteq \mathbf{R}$ вогнута. Тогда для любой точки $w \in A$ существует число $\widetilde{g}(w)$ такое, что*

$$g(v) - g(u) \geq \widetilde{g}(w)(v - u),\ \ u \leq v \leq w, \tag{2.22}$$

$$g(v) - g(u) \leq \widetilde{g}(w)(v - u),\ \ w \leq u \leq v. \tag{2.23}$$

Число $\widetilde{g}(w)$ может быть выбрано произвольно из интервала $[g'_r(w), g'_l(w)]$, образованного правой и левой производными g в точке w. В частности, если g дифференцируема в точке w, то $\widetilde{g}(w) = g'(w)$.

Доказательство предложения 2.16. Ввиду леммы 1.38 доказательство достаточно провести для порядка опасности. Пусть функция g является вогнутой. Рассмотрим два распределения $F, G \in \mathcal{F}_g$, для которых $F \leq_d G$, то есть $\mathbf{E}_F \leq \mathbf{E}_G$ и для некоторого $c \in \mathbf{R}_+$

$$F(x) \leq G(x),\ x < c.$$

$$F(x) \geq G(x),\ x \geq c,$$

и покажем, что $\pi(F) \leq \pi(G)$. Рассмотрим функцию распределения H, заданную посредством

$$H(x) = \min\{F(x), G(x)\}, \quad x \in \mathbf{R}_+,$$

и обозначим

$$w = 1 - G(c-) = 1 - \lim_{x \nearrow c} G(x).$$

Тогда при $x < c$ имеем $1-H(x) = 1-F(x) \geq 1-G(x) \geq w$, что, с использованием (2.23) дает

$$\begin{aligned} \pi(H) - \pi(G) &= \int_0^c [g(1 - F(x)) - g(1 - G(x))]\, dx \\ \leq \widetilde{g}(w) \int_0^c [1 - F(x) - 1 + G(x)]\, dx &= \widetilde{g}(w) \int_0^c [G(x) - F(x)]\, dx, \end{aligned} \tag{2.24}$$

а при $x \geq c$ получаем $1 - F(x) \leq 1 - G(x) = 1 - H(x) \leq w$, что вместе с (2.22) приводит к

$$\begin{aligned} \pi(H) - \pi(F) &= \int_c^\infty [g(1 - G(x)) - g(1 - F(x))]\, dx \\ \geq \widetilde{g}(w) \int_c^\infty [1 - G(x) - 1 + F(x)]\, dx &= \widetilde{g}(w) \int_c^\infty [F(x) - G(x)]\, dx, \end{aligned} \tag{2.25}$$

Вычитая (2.24) из (2.25), получаем с учетом леммы 1.34

$$\begin{aligned} \pi(G) - \pi(F) &= \widetilde{g}(w) \int_0^\infty (F(x) - G(x))\, dx \\ = \widetilde{g}(w) &\left[\int_0^\infty (1 - G(x))\, dx - \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx \right] \\ &= \widetilde{g}(w)(\mathbf{E}_G - \mathbf{E}_F) \geq 0, \end{aligned}$$

что и означает монотонность меры риска π.

Пусть теперь π является неубывающей относительно порядка $\leq_d$, то есть, $F \leq_d G \implies \pi(F) \leq \pi(G)$, покажем, что g вогнута, то есть для произвольных $a, b, \lambda \in [0, 1]$ выполняется $g(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b)$. Для этого зафиксируем произвольные $0 \leq a < b \leq 1$ и произвольное $\lambda \in [0, 1]$ и рассмотрим функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1-b, & 0 \le x < 1-\lambda, \\ 1-a, & 1-\lambda \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x, \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 1-(\lambda a + (1-\lambda)b), & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x. \end{cases}$$

Непосредственный подсчет показывает, что $\mathbf{E}_F = \mathbf{E}_G = \lambda a + (1-\lambda)b$, а также $F(x) \le G(x)$ при $x < 1-\lambda$ и $F(x) \ge G(x)$ при $x \ge 1-\lambda$, то есть F и G упорядочены по опасности следующим образом: $F \le_d G$. Ввиду монотонности π отсюда вытекает $\pi(F) \le \pi(G)$, что после вычисления значений

$$\pi(F) = \int_0^{1-\lambda} g(b)\,dx + \int_{1-\lambda}^1 g(a) = \lambda g(a) + (1-\lambda)g(b),$$

$$\pi(G) = \int_0^1 g(\lambda a + (1-\lambda)b)\,dx = g(\lambda a + (1-\lambda)b),$$

дает

$$g(\lambda a + (1-\lambda)b) \ge \lambda g(a) + (1-\lambda)g(b),$$

что и требовалось. $\diamond$

2.4 Выпуклость мер риска

При решении задач оптимизации с мерами риска в качестве целевых функционалов выпуклость (вогнутость) последних позволяет использовать методы выпуклого программирования, что может существенно облегчить решение [9]. В данном параграфе исследуем введенные меры риска на выпуклость. При этом важно различать выпуклость *по распределению* (введенную ранее определением 1.22) и выпуклость *по значению*.

Здесь, как и ранее, $\mathcal{F}$ означает некоторое множество функций распределения измеримом пространстве $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$, $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{R}$, причем мы будем считать, что $\mathcal{F}$ образует выпуклое множество в пространстве обобщенных мер $\mathcal{L}$ (см. параграф 1.4). С каждой функцией распределения $F \in \mathcal{F}$ будем связывать случайную величину $X = X_F$, имеющую данную функцию распределения F, отождествляя при этом различные случайные величины с одним и тем же распределением. Совокупность всех случайных величин, соответствующих функциям распределения из $\mathcal{F}$, будем обозначать $\mathcal{X} = \{X_F,\ F \in \mathcal{F}\}$. По мере необходимости будем считать функционал μ заданным на $\mathcal{F}$ или на $\mathcal{X}$. Неоднозначности при этом не возникает, поскольку все рассматриваемые на $\mathcal{X}$ функционалы вполне определяются распределением $F = F_X \in \mathcal{F}$.

Определение 2.19 *Функционал $\mu: \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ называется выпуклым по значению, если для произвольных $X, Y \in \mathcal{X}$ и произвольного $\lambda \in (0,1)$ выполняется неравенство*

$$\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y). \tag{2.26}$$

Функционал μ называется *вогнутым* по значению, если знак неравенства в (2.26) заменен на противоположный. *Строго* выпуклый (вогнутый) функционал μ определяется с помощью (2.26) со строгим неравенством. Функционал μ, заданный на выпуклом множестве функций распределения $\mathcal{F}$ или случайных величин $\mathcal{X}$ будем называть *линейным* по распределению (по значению), если он является как выпуклым, так и вогнутым в соответствующем смысле.

Замечание 2.20 *При использовании понятия выпуклости по значению следует иметь в виду следующее важное обстоятельство. Если функции распределения F_X, F_Y случайных величин X и Y заданы, то этого недостаточно для однозначного задания распределения суммы $X+Y$ или выпуклой комбинации $\lambda X + (1-\lambda)Y$ при фиксированном λ. Необходимо знать функцию* **совместного распределения** *$F_{X,Y}$ случайного вектора (X,Y). В определении 2.19 подразумевается выполнение неравенства (2.26) при* **любой** *функции совместного распределения $F_{X,Y}$ с заданными маргинальными F_X, F_Y.*

Перейдем к исследованию выпуклости конкретных мер риска.

2.4.1 Математическое ожидание и дисперсия

Предложение 2.21 *Функционал математического ожидания ε является линейным по распределению и по значению.*

Доказательство. Действительно, пусть ε задан на $\mathcal{X}$, то есть $\varepsilon(X) = \mathbf{E}X$, $X \in \mathcal{X}$. Тогда

$$\mathbf{E}(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \lambda\mathbf{E}X + (1-\lambda)\mathbf{E}Y.$$

Если же ε задан на $\mathcal{F}$: $\varepsilon(F) = \int x\,dF(x)$, $F \in \mathcal{F}$, то утверждение вытекает из

$$\varepsilon(\lambda F + (1-\lambda)G) = \int x\,d(\lambda F(x) + (1-\lambda)G(x))$$
$$= \lambda \int x\,dF(x) + (1-\lambda)\int x\,dG(x) = \lambda\varepsilon(F) + (1-\lambda)\varepsilon(G).\diamond$$

Обозначим $\mathcal{X}_2 \subseteq \mathcal{X}$ множество случайных величин X, имеющих конечный второй момент $\mathbf{E}X^2$. Тогда дисперсия может рассматриваться как функционал на $\mathcal{X}_2$: $\delta(X) = \mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$.

Предложение 2.22 *Функционал дисперсии δ является выпуклым по значению.*

Доказательство. Пусть пара случайных величин $X, Y \in \mathcal{X}_2$ имеет ковариацию

$$C_{XY} = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y).$$

С помощью элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \delta(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= \mathbf{D}(\alpha X + (1-\alpha)Y) \\ &= \alpha\delta(X) + (1-\alpha)\delta(Y) - \alpha(1-\alpha)(\mathbf{D}X + \mathbf{D}Y - 2C_{XY}). \end{aligned} \tag{2.27}$$

По неравенству Шварца

$$C_{XY} \le \sqrt{\mathbf{D}X\mathbf{D}Y},$$

откуда

$$\mathbf{D}X + \mathbf{D}Y - 2C_{XY} \ge (\sqrt{\mathbf{D}X} - \sqrt{\mathbf{D}Y})^2 \ge 0,$$

поэтому (2.27) влечет

$$\delta(\alpha X + (1-\alpha)Y) \le \alpha\delta(X) + (1-\alpha)\delta(Y), \tag{2.28}$$

что означает выпуклость δ по значению. $\diamond$

Напомним следующие элементарные факты:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 \le \mathbf{E}(X - a)^2, \quad a \in \mathbf{R}, \tag{2.29}$$

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}[X(X - \mathbf{E}X)] = \mathbf{E}[(X - a)(X - \mathbf{E}X)], \quad a \in \mathbf{R}. \tag{2.30}$$

и сформулируем

Предложение 2.23 *Функционал дисперсии является вогнутым по распределению.*

Доказательство. Обозначим E_F, D_F математическое ожидание и дисперсию функции распределения F, зафиксируем функции распределения $F, G \in \mathcal{F}$ и число $\lambda \in [0,1]$. Воспользовавшись определением дисперсии (2.30) с $a = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} \delta(\lambda F + (1-\lambda)G) &= D_{\lambda F + (1-\lambda)G} \\ = \int y(y - \lambda E_F - (1-\lambda)E_G)\, &d[\lambda F(y) + (1-\lambda)G(y)] \\ &= \int y^2\, d[\lambda F(y) + (1-\lambda)G(y)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\lambda E_F \int y\, d[\lambda F(y) + (1-\lambda)G(y)] - (1-\lambda)E_G \int y\, d[\lambda F(y) + (1-\lambda)G(y)] \\
= \lambda \mathbf{E} X_F^2 + (1-\lambda)\mathbf{E} X_G^2 - \lambda^2 (E_F)^2 - 2\lambda(1-\lambda)E_F E_G - (1-\lambda)^2 (E_G)^2 \\
= \lambda D_F + (1-\lambda) D_G + \lambda(1-\lambda)(E_F - E_G)^2 \\
\geq \lambda D_F + (1-\lambda) D_G = \lambda\delta(F) + (1-\lambda)\delta(G),
\end{aligned}
$$

что и требовалось. $\diamond$

Предложение 2.24 *Смешанный функционал θ_β (2.10) является выпуклым по значению и вогнутым по распределению.*

Доказательство непосредственно вытекает из предложений 2.21, 2.22 и 2.23. $\diamond$

2.4.2 Мера ожидаемой полезности

Исследуем теперь выпуклость меры риска ρ.

Предложение 2.25 *ρ является линейным функционалом по распределению.*

Доказательство сразу вытекает из (2.11): зафиксируем $F, G \in \mathcal{F}$, $\lambda \in (0,1)$, тогда

$$
\begin{aligned}
\rho(\lambda F + (1-\lambda)G) = \int U(v)\, d[\lambda F(v) + (1-\lambda)G(v)] \\
= \lambda \int U(v)\, dF(v) + (1-\lambda) \int U(v)\, dG(v) = \lambda\rho(F) + (1-\lambda)\rho(G). \ \diamond
\end{aligned}
$$

Предложение 2.26 *Мера риска ρ выпукла (вогнута) по значению тогда и только тогда, когда функция U выпукла (вогнута).*

Доказательство. Пусть U выпукла. Зафиксируем произвольные $X, Y \in \mathcal{X}_U$ и произвольное число $\lambda \in [0,1]$. Имеем:

$$
\begin{aligned}
\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \mathbf{E} U(\lambda X + (1-\lambda)Y) \\
\leq \mathbf{E}(\lambda U(X) + (1-\lambda)U(Y)) = \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y),
\end{aligned}
$$

то есть ρ является выпуклой по значению.

Пусть теперь ρ выпукла по значению. Для $a \in \mathbf{R}$ обозначим V_a вырожденную случайную величину с функцией распределения W_a из (2.6). Зафиксируем произвольные v, w из области определения U, произвольное число $\lambda \in [0,1]$, и рассмотрим вырожденные случайные величины V_v, V_w. Ввиду (2.12) имеем:

$\rho(V_v) = U(v)$, $\rho(V_w) = U(w)$, кроме того, $\lambda V_v + (1-\lambda)V_w = V_{\lambda v+(1-\lambda)w}$, откуда $U(\lambda V_v + (1-\lambda)V_w) = U(V_{\lambda v+(1-\lambda)w})$, так что по выпуклости ρ

$$\rho(\lambda V_v + (1-\lambda)V_w) \le \lambda\rho(V_v) + (1-\lambda)\rho(V_w),$$

что означает

$$U(\lambda v + (1-\lambda)w) \le \lambda U(v) + (1-\lambda)U(w),$$

то есть, выпуклость U. Доказательство для случая вогнутости аналогично. $\diamond$

2.4.3 Мера возмущенной вероятности

Перейдем к исследованию выпуклости меры риска π. Нам понадобится следующий результат из [72].

Лемма 2.27 *Мера риска π является субаддитивной на $\mathcal{X}$:*

$$\pi(X+Y) \le \pi(X) + \pi(Y),\ X, Y \in \mathcal{X},$$

тогда и только тогда, когда g вогнута.

Предложение 2.28 *Функция g вогнута тогда и только тогда, когда мера риска π является выпуклой по значению.*

Доказательство. Пусть g вогнута. Тогда для произвольных рисков X, Y и числа $\alpha \in [0,1]$ из леммы 2.27 и положительной однородности π (предложение 2.3) вытекает:

$$\pi(\alpha X + (1-\alpha)Y) \le \pi(\alpha X) + \pi((1-\alpha)Y) = \alpha\pi(X) + (1-\alpha)\pi(Y),$$

что и означает выпуклость π по значению.

Пусть теперь π выпукла по значению. Тогда для произвольных $X, Y \in \mathcal{X}$

$$\pi\left(\frac{X+Y}{2}\right) \le \frac{\pi(X)+\pi(Y)}{2},$$

что вместе с положительной однородностью π влечет $\pi(X+Y) \le \pi(X) + \pi(Y)$, а по лемме 2.27 отсюда следует вогнутость g. $\diamond$

Предложение 2.29 *Функция g вогнута тогда и только тогда, когда мера π является вогнутой по распределению.*

Доказательство. Пусть g вогнута, $F, G \in \mathcal{F}$ – две функции распределения, λ – произвольное число из отрезка $[0,1]$, тогда

$$\pi(\lambda F + (1-\lambda)G) = \int_0^\infty g[\lambda(1-F(t)) + (1-\lambda)(1-G(t))]\,dt$$
$$\geq \lambda \int_0^\infty g(1-F(t))\,dt + (1-\lambda)\int_0^\infty g(1-G(t))\,dt = \lambda\pi(F) + (1-\lambda)\pi(G),$$

что доказывает вогнутость π по распределению.

Пусть теперь π вогнута по распределению, то есть для любых функций распределения $F, G \in \mathcal{S}$ и произвольного числа $\lambda \in [0,1]$ выполняется

$$\pi(\lambda F + (1-\lambda)G) \geq \lambda\pi(F) + (1-\lambda)\pi(G). \tag{2.31}$$

Зафиксируем произвольные $p, q, \lambda \in [0,1]$ и рассмотрим бернуллиевские функции распределения B_p, B_q. Их смесь очевидно, равна $B_{\lambda p+(1-\lambda)q}$. Из (2.19) вытекает

$$\pi(B_p) = g(p),\ \pi(B_q) = g(q),\ \pi(B_{\lambda p+(1-\lambda)q}) = g(\lambda p + (1-\lambda)q),$$

так что (2.31) влечет $g(\lambda p + (1-\lambda)q) \geq \lambda g(p) + (1-\lambda)g(q)$, что и требовалось. $\diamond$

Предложение 2.30 *Функция g выпукла тогда и только тогда, когда мера π является выпуклой по распределению.*

Доказательство проводится так же, как и доказательство предложения 2.29.

2.5 Вычисление мер риска

2.5.1 Дискретизация распределения

Пусть F – произвольная функция распределения на $\mathbf{R}_+$, а X_F – случайная величина, имеющая функцию распределения F. Зафиксируем $\alpha > 0$ и рассмотрим интервалы $\Delta_k = [(k-1)\alpha, k\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим

$$p_k = F(k\alpha-) - F((k-1)\alpha-) = \mathbf{P}\{X_F \in \Delta_k\},\ \ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.32}$$

Левая аппроксимация. Вероятности (2.32) приписываются значениям $r_k = (k-1)\alpha,\ k = 1, 2, \ldots$. Аппроксимирующая функция распределения имеет вид

$$F_l(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i,\ \ x \in \Delta_k,\ \ k = 1, 2, \ldots$$

Правая аппроксимация. Вероятности (2.32) приписываются значениям $r_k = k\alpha,\ k = 1, 2, \ldots$. Аппроксимирующая функция распределения имеет вид

$$F_r(x) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i,\ \ x \in \Delta_k,\ \ k = 1, 2, \ldots$$

Центральная аппроксимация. Вероятности (2.32) приписываются значениям $r_k = (k-1/2)\alpha,\ k = 1, 2, \ldots$. Аппроксимирующая функция распределения имеет вид

$$F_c(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i, \quad x \in \Lambda_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\Lambda_0 = [0, \alpha/2)$, $\Lambda_k = [(k-1/2)\alpha, (k+1/2)\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$.

2.5.2 Мера ожидаемой полезности

Пусть распределение $P \in \mathcal{P}$ дискретно, то есть существует не более чем счетная совокупность точек $R = \{r_1, r_2, \ldots\} \subseteq \mathcal{R}$ такая, что $P(R) = 1$. При этом распределение вполне определяется значениями на точках из R: $P(\{r_k\}) = p_k,\ k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\rho(P) = \int_{\mathcal{R}} U(r)\, dP(r)$ – ожидаемая полезность распределения $P \in \mathcal{P}$. Для дискретного распределения формула вычисления есть

$$\rho(P) = \sum_{k=1}^{\infty} U(r_k) p_k.$$

Если $\mathcal{R} = \mathbf{R}_+$ и функция распределения F непрерывна, то для приближенного вычисления $\rho(F)$ возможно применение аппроксимаций из 2.5.1.

2.5.3 Мера возмущенной вероятности

Дискретное распределение

Для функции распределения F обозначим $\overline{F}$ дополнительную функцию распределения, вычисляемую по формуле

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Пусть $\pi(F) = \int_0^{\infty} g(\overline{F}(x))\, dx$ – мера возмущенной вероятности. Если распределение дискретно, а точки R занумерованы в порядке возрастания: $r_1 < r_2 < \ldots$, то функция распределения F и дополнительная функция распределения $\overline{F}$ имеют вид

$$F(x) = \sum_{k:\, x_k \le x} p_k; \quad \overline{F}(x) = \sum_{k:\, x_k > x} p_k.$$

Обозначив

$$w_i = g\left(\sum_{k=i}^{\infty} p_k\right),\ i = 1, 2, \ldots,$$

и положив $r_0 = 0$, имеем

$$\pi(F) = \sum_{i=1}^{\infty} (r_i - r_{i-1}) w_i = \sum_{i=1}^{\infty} r_i (w_i - w_{i+1}).$$

Если R конечно: $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$, то формулы приобретают вид

$$\pi(F) = \sum_{i=1}^{n} (r_i - r_{i-1}) w_i = \sum_{i=1}^{n} r_i (w_i - w_{i+1}), \tag{2.33}$$

а если распределение к тому же равномерно на R, то есть $p_1 = \ldots = p_n = 1/n$, то

$$w_i = g\left(\frac{n-i+1}{n}\right), \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.34}$$

Формулы (2.33), (2.34) можно использовать при применении метода Монте-Карло. В этом случае $r_1, \ldots, r_n$ являются реализациями случайной величины, полученными методом Монте-Карло, и упорядоченными по возрастанию.

Непрерывное распределение

Рассмотрим методы приближенного вычисления меры π для непрерывных распределений.

При использовании левой аппроксимации F получаем следующее приближение для π:

$$\begin{aligned} \pi_l(F) = \pi(F_l) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k} g(1 - F_l(x))\, dx \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} g\left(1 - \sum_{i=1}^{k} p_i\right) dx = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} w_k, \end{aligned} \tag{2.35}$$

где

$$w_k = g\left(1 - \sum_{i=1}^{k} p_i\right). \tag{2.36}$$

При использовании правой или центральной аппроксимации имеем, соответственно,

$$\pi_r(F) = \pi(F_r) = \alpha\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k\right),$$

$$\pi_c(F) = \pi(F_c) = \alpha\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} w_k\right),$$

где w_k определены в (2.36). Поскольку $F_l \le_s F \le_s F_r$, а мера риска π монотонна относительно стохастического доминирования, имеем $\pi_l(F) \le \pi(F) \le \pi_r(F)$, и, так как $\pi_r(F) - \pi_c(F) = \pi_c(F) - \pi_l(F) = \alpha/2$, ошибка аппроксимации $\pi(F)$ посредством $\pi_c(F)$ не превышает $\alpha/2$.

Глава 3

Портфельный анализ

В настоящей главе описывается классический способ применения мер риска в задачах принятия решений на примере стандартных задач портфельного анализа. В параграфе 3.1 приведена постановка задачи и введено понятие выпуклости меры риска по портфелю. Далее, в параграфе 3.2 исследуется семейство портфелей второго порядка, в которых решение принимается на основании ковариационной структуры распределения состояний среды. В параграфе 3.3.2 устанавливаются связи с методом максимизации ожидаемой полезности.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим частный случай общей задачи принятия решений (см. 2.1), известный, как проблема выбора портфеля. Напомним, что для постановки задачи необходимо задать описание состояний среды вероятностным пространством $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, множества результатов – измеримым пространством $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$, определить множество решений $\mathcal{D}$, и указать отображение $\xi: \ \mathcal{S} \times \mathcal{D} \to \mathcal{R}$, измеримое относительно s при каждом фиксированном $d \in \mathcal{D}$.

Пусть на рынке присутствуют n финансовых инструментов, характеризуемых своей доходностью, которая пропорциональна величине вложенного в них капитала, и при вложении единичного капитала в i-й инструмент описывается случайной величиной X_i, $i = 1, \dots, n$. Доходности отдельных инструментов не являются, вообще говоря, стохастически независимыми, так что их поведение характеризуется совместным распределением вектора $(X_1, \dots, X_n)^T$, где верхний индекс T означает транспонирование. Состояние среды описывается в данном случае вероятностным пространством $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathbf{P})$, где $\mathcal{B}^n$ – борелевская σ-алгебра в $\mathbf{R}^n$, а $\mathbf{P}$ – совместное распределение вектора X.

Решением $y = (y_1, \dots, y_n)$ в данной задаче является способ распределения единичного капитала между инструментами: в i-й инструмент вкладывается доля y_i, $i = 1, \ldots, n$, так что $y_1 + \ldots + y_n = 1$, поэтому множество решений есть

$$\mathcal{D} \subseteq L_n = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n |\ y_1 + \ldots + y_n = 1\}. \tag{3.1}$$

Результатом решения $y \in \mathcal{D}$ является доходность сформированного портфеля, вычисляемая по формуле

$$Y = Y_y = y_1 X_1 + \ldots y_n X_n, \tag{3.2}$$

которая задает отображение ξ. Y представляет собой случайную величину с функцией распределения F_y, зависящей от решения y, а совокупность всевозможных распределений

$$\mathcal{F} = \{F_y,\ y \in \mathcal{D}\}$$

представляет собой множество, из которого предстоит выбирать наилучшее (в смысле некоторого отношения предпочтения $\preceq$) распределение.

Таким образом, все элементы задачи принятия решения определены. Отношение предпочтения на $\mathcal{F}$ в данной главе будем задавать с помощью функционала (меры риска) μ, определенного на $\mathcal{F}$, по правилу (1.13).

Мера риска портфеля Y оказывается при этом функцией весового вектора y:

$$\mu(Y) = \mu(y_1 X_1 + ... + y_n X_n) = f(y), \tag{3.3}$$

поэтому задача выбора портфеля формулируется следующим образом:

$$f(y) \to \max_y (\min_y) \tag{3.4}$$

при условии

$$y \in L_n \tag{3.5}$$

и, возможно, дополнительных ограничениях, связанных с существом каждой конкретной задачи.

Введем некоторые обозначения. Пусть $m = (m_1, ..., m_n)^T$ – вектор средних значений случайного вектора X, а $V = (v_{ij})$ – его ковариационная матрица, то есть

$$m_i = \mathbf{E} X_i,\ \ v_{ij} = \mathbf{E}(X_i - m_i)(X_j - m_j),\ \ i, j = 1, ..., n. \tag{3.6}$$

Как нетрудно убедиться, среднее значение и дисперсия распределения доходности портфеля (3.2) вычисляются по формулам

$$\mathbf{E} Y = y_1 m_1 + ... + y_n m_n = y^T m,\ \ \mathbf{D} Y = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} v_{ij} y_i y_j = y^T V y. \tag{3.7}$$

Обозначим $I = (1, 1, ..., 1)^T$, тогда множество L_n можно задать равенством

$$L_n = \{y \in \mathbf{R}^n |\ y^T I = 1\}. \tag{3.8}$$

Всюду далее будем считать ковариационную матрицу V невырожденной; при этом как V, так и V^{-1} являются положительно определенными, что позволяет задать в $\mathbf{R}^n$ скалярное произведение

$$(u, v) = u^T V^{-1} v, \quad u, v \in \mathbf{R}^n \tag{3.9}$$

и норму $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, которую иногда называют энергетической. Введем для дальнейшего обозначение

$$\Delta = \|I\|^2 \|m\|^2 - (I, m)^2.$$

Ввиду неравенства Шварца имеем $\Delta \geq 0$, причем $\Delta = 0$ в том и только в том случае, когда m коллинеарен I, то есть состоит из одинаковых компонент.

В некоторых случаях веса портфеля должны быть неотрицательными, в связи с чем задача оптимизации (3.4) рассматривается не на всем множестве L_n (3.5), а на его подмножестве

$$\mathbf{S}_n = \{y \in \text{Ł}_n |\ y_1 \geq 0, ..., y_n \geq 0\}, \tag{3.10}$$

называемом стандартным симплексом в $\mathbf{R}^n$.

Решение задачи (3.4) – (3.5) упрощается, если целевая функция f оказывается вогнутой (выпуклой). В этой связи естественно ввести

Определение 3.1 *Мера риска $\mu : \ \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ называется выпуклой (вогнутой) по портфелю, если для произвольного набора инструментов $(X_1, \ldots, X_n)$ функция $f : L_n \to \mathbf{R}$, заданная равенством (3.3), является выпуклой (вогнутой) на своей области определения L_n.*

Введенное понятие оказывается тесно связанным с выпуклостью по значению, а именно, справедливо

Предложение 3.2 *Мера риска $\mu : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ является выпуклой (вогнутой) по значению, тогда и только тогда, когда она выпукла (вогнута) по портфелю.*

Доказательство. Действительно, пусть μ выпукла по значению. Зафиксируем $y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n) \in L_n$ и $\lambda \in [0, 1]$. Имеем

$$\begin{aligned} f(\lambda y + (1-\lambda)z) &= \mu[(\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1)X_1 + \ldots + (\lambda y_n + (1-\lambda)z_n)X_n] \\ &= \mu[\lambda(y_1 X_1 + \ldots + y_n X_n) + (1-\lambda)(z_1 X_1 + \ldots + z_n X_n)] \\ &\leq \lambda\mu[y_1 X_1 + \ldots + y_n X_n] + (1-\lambda)\mu[z_1 X_1 + \ldots + z_n X_n] \\ &= \lambda f(y) + (1-\lambda) f(z), \end{aligned}$$

что и означает выпуклость f, то есть выпуклость μ по портфелю.

Пусть теперь f выпукла. Зафиксируем произвольные $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$ и $\lambda \in [0,1]$, и рассмотрим векторы долей $y = (1,0)$, $z = (0,1)$. С учетом выпуклости f имеем

$$\begin{aligned} \mu(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) = \mu(\lambda(1\cdot X_1 + 0\cdot X_2) + (1-\lambda)(0\cdot X_1 + 1\cdot X_2)) \\ = \mu(\lambda(y_1X_1 + y_2X_2) + (1-\lambda)(z_1X_1 + z_2X_2)) \\ = \mu[(\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1)X_1 + (\lambda y_2 + (1-\lambda)z_2)X_2] \\ = f(\lambda y + (1-\lambda)z) \le \lambda f(y) + (1-\lambda)f(z) \\ = \lambda\mu(y_1X_1 + y_2X_2) + (1-\lambda)\mu(z_1X_1 + z_2X_2) = \lambda\mu(X_1) + (1-\lambda)\mu(X_2), \end{aligned}$$

что ввиду произвольности X_1, X_2, λ означает выпуклость μ по значению.

Доказательство вогнутости проводится аналогично. $\diamond$

3.2 Портфели второго порядка

В данном параграфе будем предполагать, что распределение случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ имеет конечные вторые моменты, так что распределения из $\mathcal{F}$ (случайные величины из $\mathcal{X}$) также обладают этим свойством.

3.2.1 Простейший портфель

На множестве $\mathcal{X}$ случайных величин, обладающих конечным вторым моментом: $\mathbf{E}X^2 < \infty$ в качестве меры риска можно выбрать дисперсию случайной величины:

$$\delta(X) = \mathbf{D}X,\ X \in \mathcal{X}. \tag{3.11}$$

Обозначив D_F дисперсию случайной величины, имеющей функцию распределения F, эту меру риска можно задать на множестве распределений $\mathcal{F}$, обладающих конечным вторым моментом

$$\delta(F) = D_F,\ F \in \mathcal{F}. \tag{3.12}$$

Поскольку δ является невозрастающей функцией относительно порядка неприятия риска (предложение 2.8), эту меру риска следует минимизировать, поэтому задача (3.4), (3.5) преобразуется к виду

$$y^TVy \to \min_y, \tag{3.13}$$

$$y^TI = 1. \tag{3.14}$$

Решим эту задачу методом множителей Лагранжа [9]. Для этого составим функцию Лагранжа задачи (3.4), (3.5)

$$\mathcal{L}(y,\lambda) = y^T V y + \lambda(y^T I - 1),$$

и найдем ее частные производные

$$\mathcal{L}_y = 2Vy + \lambda I,$$
$$\mathcal{L}_\lambda = y^T I - 1.$$

Приравнивая эти производные к 0, из первого уравнения получаем

$$y = -\frac{1}{2}\lambda V^{-1} I,$$

подставляем отсюда y во второе уравнение, находим $\lambda = -2\|I\|^2$, так что решением задачи (3.13), (3.14) является вектор

$$y^* = \frac{V^{-1} I}{\|I\|^2}. \tag{3.15}$$

Отметим, что значения ожидаемой доходности и дисперсии портфеля на оптимальном y^* равны

$$\varepsilon(Y_{y^*}) = y^{*T} m = \frac{(m, I)}{\|I\|^2}, \quad \delta(Y_{y^*}) = \frac{1}{\|I\|^2}. \tag{3.16}$$

В качестве иллюстрации выпишем решение этой задачи для случая некоррелированных инструментов (компонент вектора X). При этом ковариационная матрица V является диагональной: $V = diag(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2)$, так что $V^{-1} = diag(\sigma_1^{-2}, ..., \sigma_n^{-2})$, $\|I\|^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}$ и

$$y_i^* = \frac{\sigma_i^{-2}}{\sigma_1^{-2} + ... + \sigma_n^{-2}}, \;\; i = 1, 2, ..., n, \quad f(y^*) = \frac{1}{\sigma_1^{-2} + ... + \sigma_n^{-2}}.$$

В частности, если $\sigma_1 = ... = \sigma_n = \sigma$, то

$$y_i^* = \frac{1}{n}, \; i = 1, ..., n, \quad f(y^*) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

3.2.2 Смешанный функционал

Рассмотрим теперь смешанный функционал

$$\frac{1}{2\alpha}\delta(X) - \varepsilon(X), \; X \in \mathcal{X}, \tag{3.17}$$

где $\alpha > 0$ – параметр. Этот функционал является, как нетрудно проверить, невозрастающим относительно порядка неприятия риска, и не является монотонным относительно других порядков на $\mathcal{X}$, поэтому его следует минимизировать. Рассмотрим задачу выбора портфеля с этим функционалом:

$$g(y) = \frac{1}{2\alpha} y^T V y - y^T m \to \min_y, \tag{3.18}$$

$$y^T I = 1. \tag{3.19}$$

Решение ее методом множителей Лагранжа дает

$$y^* = y^*(\alpha) = \alpha u + v, \tag{3.20}$$

$$g(y^*) = \frac{1/\alpha - (m, I)}{\|I\|^2}, \tag{3.21}$$

где

$$u = V^{-1}\left[m - \frac{(m, I)}{\|I\|^2} I\right], \quad v = \frac{V^{-1} I}{\|I\|^2}, \tag{3.22}$$

причем $I^T u = 0$, $I^T v = 1$, то есть вектор v лежит в гиперплоскости L_n, а вектор u параллелен ей. Ожидаемая доходность и дисперсия оптимального портфеля принимают значения

$$\varepsilon(Y_{y^*}) = y^{*T} m = \frac{\alpha \Delta}{\|I\|^2} + \frac{(m, I)}{\|I\|^2}, \tag{3.23}$$

$$\delta(Y_{y^*}) = y^{*T} V y^* = \frac{\alpha^2 \Delta}{\|I\|^2} + \frac{1}{\|I\|^2}. \tag{3.24}$$

Исследуем поведение решения этой задачи при изменении параметра α на $(0, \infty)$. Из (3.23) и (3.24) ясно, что ожидаемая доходность и дисперсия оптимального портфеля являются строго возрастающими функциями α, и

$$\lim_{\alpha \to 0} y^*(\alpha) = \frac{V^{-1} I}{\|I\|^2}, \quad \lim_{\alpha \to 0} \varepsilon(Y_{y^*(\alpha)}) = \frac{(m, I)}{\|I\|^2}, \quad \lim_{\alpha \to 0} \delta(Y_{y^*(\alpha)}) = \frac{1}{\|I\|^2},$$

то есть предельное решение совпадает с (3.15) и дает те же значения первых двух моментов доходности оптимального портфеля, что и (3.16).

Обозначив $M = \varepsilon(Y_{y^*})$, $\sigma^2 = \delta(Y_{y^*})$, и исключив α из (3.23), (3.24), получим явную зависимость σ^2 от M на оптимальном решении:

$$\sigma^2 = \frac{\|I\|^2 M^2 - 2M(I, m) + \|m\|^2}{\Delta}. \tag{3.25}$$

Отметим, что положительным значениям α соответствуют здесь значения M, удовлетворяющие ограничению

$$M > \frac{(m, I)}{\|I\|^2}. \tag{3.26}$$

3.2.3 Задача Марковица

В [106] рассматривается задача, похожая на (3.13), (3.14), с одним дополнительным ограничением: ожидаемая доходность портфеля $y^T m$ фиксируется на некотором уровне M, и решается задача минимизации дисперсии портфеля $y^T V y$.

$$y^T V y \to \min_y, \tag{3.27}$$

$$y^T I = 1, \tag{3.28}$$

$$y^T m = M, \tag{3.29}$$

где M – параметр задачи. Решая (3.27)–(3.29) методом множителей Лагранжа, получаем:

$$y^*(M) = uM + v, \tag{3.30}$$

где

$$u = V^{-1}\,\frac{m\|I\|^2 - I(m,I)}{\Delta}, \quad v = V^{-1}\,\frac{I\|m\|^2 - m(m,I)}{\Delta}.$$

Видно, что зависимость решения y^* от параметра задачи M линейна. Вычисляя дисперсию портфеля на оптимальном векторе (3.30), получаем

$$\sigma^2 = \delta(Y_{y^*(M)}) = \frac{\|I\|^2 M^2 - 2(m,I)M + \|m\|^2}{\Delta}, \tag{3.31}$$

так что зависимость оптимальной дисперсии от ожидаемой доходности квадратична. Минимальное значение в (3.31) достигается при $M^* = (m,I)/\|I\|^2$ и равно $1/\|I\|^2$. Интересно отметить, что оптимальный вектор долей y^*, соответствующий M^*, имеет вид $y^*(M^*) = V^{-1}I/\|I\|^2$, что совпадает с решением задачи (3.13)–(3.14). Отметим также, что $I^T u = 0$, $I^T v = 1$, то есть вектор v лежит в гиперплоскости L_n (3.8), а вектор u параллелен этой гиперплоскости.

Множество точек плоскости (σ^2, M), связанных соотношением (3.31) при $M \geq M^*$, обычно называется эффективной границей [108]. Точки этого множества соответствуют портфелям, обладающим минимальной дисперсией σ^2 при заданной ожидаемой доходности M, или, что в данном случае эквивалентно, максимальной ожидаемой доходностью M при заданной дисперсии σ^2. Отметим, что на эффективной границе σ^2 является строго возрастающей функцией от M.

3.2.4 Отношение к риску

Параметр M задачи Марковица (3.27)–(3.29) может служить индикатором отношения инвестора к риску: более рискованный инвестор склонен задать большее значение ожидаемой доходности M, принимая на себя больший "риск"σ^2. В задаче (3.18)–(3.19) аналогичную роль играет параметр α: большие его значения приводят к большей ожидаемой доходности и большей дисперсии портфеля. В действительности между этими параметрами существует еще более тесная связь, а именно, решения задач (3.27)–(3.29) и (3.18)–(3.19) со значениями параметров M и α, связанных соотношением

$$M = M(\alpha) = \frac{\alpha\Delta}{\|I\|^2} + \frac{(m, I)}{\|I\|^2}, \quad \alpha > 0, \tag{3.32}$$

или обратным соотношением

$$\alpha = \alpha(M) = \frac{M\|I\|^2 - (m, I)}{\Delta}, \quad M > M^* = \frac{(m, I)}{\|I\|^2}, \tag{3.33}$$

приводят к одинаковым портфелям.

3.3 Метод ожидаемой полезности

3.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим теперь другой подход к выбору оптимального портфеля, основанный на теории полезности [15]. Пусть $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – неубывающая вогнутая функция. С ее помощью можно задать следующую меру риска:

$$\rho(X) = \mathbf{E}U(X), \quad X \in \mathcal{X}, \tag{3.34}$$

которая называется ожидаемой полезностью риска X.

Ожидаемая полезность портфеля (3.2) имеет вид

$$g(y) = \mathbf{E}U(\mathcal{P}) = \mathbf{E}U\left(y_1X_1 + ... + y_nX_n\right).$$

Рассмотрим задачу оптимизации портфеля

$$g(y) \to \max_y, \tag{3.35}$$

$$y \in L_n. \tag{3.36}$$

Из вогнутости U по предложению 2.26 вытекает вогнутость ρ по значению, что, по предложению 3.2 влечет вогнутость g, как функции y на L_n, поэтому (3.35), (3.36) является задачей выпуклого программирования, и может быть решена имеющимися численными методами.

Мы рассмотрим здесь частный случай, в котором удается получить решение аналитически, и сравним полученное решение с уже имеющимися результатами.

3.3.2 Нормальное распределение и показательная полезность

Пусть совместное распределение вектора инструментов $X = (X_1, ..., X_n)$ является нормальным. Тогда [39] распределение портфеля $\mathcal{P}(y)$ также является нормальным с параметрами $\nu = y^T m$ и $\sigma^2 = y^T V y$ и плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{3.37}$$

Предположим, далее, что функция полезности U показательна:

$$U(x) = 1 - \exp(-x/\alpha),\ x \in \mathbf{R}, \tag{3.38}$$

где $\alpha > 0$ – параметр. Тогда ожидаемая полезность может быть вычислена явно:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}U(\mathcal{P}(y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \exp(-x/\alpha) f(x)\, dx \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x/\alpha) \exp\left(-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.\end{aligned}$$

Поскольку подинтегральное выражение равно

$$\exp\left(-\frac{(x-(\nu-\sigma^2/\alpha))^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{1}{2\alpha^2}\sigma^2 - \frac{\nu}{\alpha}\right), \tag{3.39}$$

получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}U(\mathcal{P}(y)) &= 1 - \exp\left(\frac{1}{2\alpha^2}\sigma^2 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-(\nu-\sigma^2/\alpha))^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= 1 - \exp\left(\frac{1}{2\alpha^2}\sigma^2 - \frac{\nu}{\alpha}\right) = 1 - \exp\left(\frac{1}{2\alpha^2} y^T V y - \frac{1}{\alpha} y^T m\right),\end{aligned}$$

откуда видно, что максимизация $\mathbf{E}\mathcal{P}(y)$ эквивалентна минимизации функции

$$g(y) = \frac{1}{2\alpha} y^T V y - y^T m$$

при условии $y \in Ł_n$, что совпадает с задачей (3.18)–(3.19). Таким образом, максимизация показательной ожидаемой полезности при нормальном распределении инструментов дает такой же портфель, как и метод взвешенного критерия. Отметим также, что параметр неприятия риска α в этой задаче совпадает по смыслу с аналогичным параметром задачи (3.18)–(3.19).

Глава 4

Построение меры риска

Как отмечалось в главе 2, одной из основных задач теории риска является построение меры риска, согласованной с отношением предпочтения на множестве вероятностных распределений. В настоящей главе рассматривается аксиоматический подход к решению этой проблемы. Сначала в параграфе 4.1 приводится способ построения вероятности на измеримом пространстве по аксиоматически заданному отношению правдоподобия; материал этого параграфа служит иллюстрацией методологии, и имеет также самостоятельный интерес. Затем в параграфе 4.2 решается собственно задача построения меры риска по отношению предпочтения, обладающему некоторыми свойствами. Последний параграф главы иллюстрирует связь стохастического доминирования распределений с отношением предпочтения на их множестве.

4.1 Субъективная вероятность

Формулировка любой вероятностной задачи или модели обычно начинается словами "пусть задано вероятностное пространство $(\mathcal{R}, \mathcal{B}, P)$". В приложениях вероятностных моделей обычно не возникает затруднений в задании множества исходов $\mathcal{R}$ и σ-алгебры его подмножеств $\mathcal{B}$. С заданием вероятностного распределения P на $\mathcal{B}$ дело обстоит не так просто. За исключением симметричных случаев, приводящих к "классическому"определению вероятности [39], не удается сколько-нибудь обоснованно задавать P без привлечения каких-либо дополнительных инструментов.

Методы математической статистики [2] позволяют в принципе с любой точностью оценивать распределение P по наблюдениям, однако результат применения статистических методов описывает вид распределения *в прошлом*, тогда как в задачах принятия решений (да и во многих других ситуациях) интерес представляет вид распределения состояний среды *в будущем*. Поэтому принятие того или иного распределения для использования в модели носит во многом субъективный характер. Одно из возможных субъективных решений: "будущее является точной вероятностной копией прошлого". В этом случае приближенное распределение, полученное статистическими методами, без изменений используется в качестве распределения будущих состояний среды. Возможны и другие субъективные суждения относительно P. В последнем случае необходимо применять какой-либо аппарат, позволяющий получать конкретный вид распределения на основании таких суждений.

В данном параграфе излагается один подход к вычислению вероятностного распределения по отношению правдоподобия, заданному на $\mathcal{B}$.

4.1.1 Отношение правдоподобия

Пусть на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ задано некоторое вероятностное распределение P, то есть функция множества $P: \mathcal{B} \to \mathbf{R}$, обладающая свойствами

$$P(A) \geq 0,\ A \in \mathcal{B}, \tag{4.1}$$

$$P(\mathcal{R}) = 1, \tag{4.2}$$

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots,\quad A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}. \tag{4.3}$$

При этом на $\mathcal{B}$ возникает отношение предпочтения $\preceq$, задаваемое P по правилу

$$A \prec B \iff P(A) < P(B). \tag{4.4}$$

Такое отношение предпочтения естественно называть правдоподобием, как это сделано в [8].

Зададимся вопросом: если на $\mathcal{B}$ задано отношение правдоподобия, то есть полное транзитивное отношение $\preceq$, возможно ли построение вероятностного распределения $P: \mathcal{R} \to [0,1]$, согласованного с $\preceq$ по правилу (4.4)?

Сначала рассмотрим некоторые свойства отношения правдоподобия, вытекающие из свойств вероятностного распределения (4.1) – (4.3), чтобы затем отобрать из них минимальный набор, и использовать его в качестве системы аксиом.

Свойство 4.1.1

$$\emptyset \preceq A,\ A \in \mathcal{B};\quad \emptyset \prec \mathcal{R}. \tag{4.5}$$

Свойство 4.1.2 *Если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ и $A_i \preceq B_i$, $i = 1, 2$, то $A_1 + A_2 \preceq B_1 + B_2$, причем, если хотя бы в одной паре событий предпочтение строгое, например, $A_1 \prec B_1$, то $A_1 + A_2 \prec B_1 + B_2$.*

Свойство 4.1.3 *Если* $B, A_i \in \mathcal{B},\ A_i \succeq B,\ i = 1, 2, \ldots$ *и* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, *то*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \succeq B. \tag{4.6}$$

Частным случаем свойства 4.1.2 является

Свойство 4.1.4 *Для* $A, B, C \in \mathcal{B}$

$$A \preceq B \iff A + C \preceq B + C. \tag{4.7}$$

Далее нам потребуется понятие случайной величины с равномерным распределением на $[0, 1]$, которое можно ввести, опираясь лишь на отношение правдоподобия. Для отрезка $I = [a, b] \subseteq [0, 1]$ обозначим $\lambda(I)$ его длину.

Определение 4.1 *Пусть на* $\mathcal{B}$ *задано отношение правдоподобия* $\preceq$. *Измеримое отображение* $X : \ \mathcal{R} \to [0, 1]$ *называется случайной величиной с равномерным распределением, если для произвольных отрезков* $I_1, I_2 \subseteq [0, 1]$ *соотношение* $X^{-1}(I_1) \preceq X^{-1}(I_2)$ *выполняется в том и только в том случае, когда* $\lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$.

Понятно, что такую случайную величину можно задать не на всяком измеримом пространстве $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ с отношением правдоподобия $\preceq$. Так, если отношение $\preceq$ порождено вероятностным распределением P на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$, то для того, чтобы это было возможно, вероятностная мера P должна обладать некоторой регулярностью. Достаточным, например, является следующее условие: для всякого множества $A \in \mathcal{B}$ вероятности его измеримых подмножеств целиком заполняют отрезок $[0, P(A)]$:

$$\{P(B) |\ B \in \mathcal{B},\ B \subseteq A\} = [0, P(A)].$$

При этом равномерно распределенную случайную величину можно построить с помощью бесконечной процедуры деления отрезка $[0, 1]$ пополам.

Таким образом, следующее предположение несколько сужает класс отношений правдоподобия, для которых будет гарантировано существование согласованного вероятностного распределения.

Предположение 4.1.1 *На* $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ *существует случайная величина с равномерным распределением на* $[0, 1]$.

4.1.2 Существование вероятностного распределения

В [8] была доказана следующая

Теорема 4.2 *Пусть на σ-алгебре $\mathcal{B}$ задано полное отношение $\preceq$, обладающее свойствами 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, и выполнено предположение 4.1.1. Тогда на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ существует единственное вероятностное распределение P, согласованное с отношением $\preceq$.*

Мы приведем здесь немного другую схему, которая представляется логически более простой. В этой схеме вместо свойства 4.1.2 требуется наличие его частного случая 4.1.4, и добавляется требование транзитивности отношения $\preceq$.

Теорема 4.3 *Пусть на σ-алгебре $\mathcal{B}$ задано полное транзитивное отношение $\preceq$, обладающее свойствами 4.1.1, 4.1.3, 4.1.4, и выполнено предположение 4.1.1. Тогда на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ существует единственное вероятностное распределение P, согласованное с отношением $\preceq$.*

Доказательство теоремы представим в виде серии предложений, в каждом из которых предполагаются выполненными условия теоремы.

Предложение 4.4 *Отношение правдоподобия обладает свойством 4.1.2.*

Доказательство. Пусть $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ и $A_i \preceq B_i,\ i = 1, 2$. Обозначим $C = B_1 \cap A_2$, тогда из условия $A_1 \preceq B_1$ и свойства 4.1.4 вытекает

$$A_1 + (A_2 \setminus C) \preceq B_1 + (A_2 \setminus C),$$

а $A_2 \preceq B_2$ по тому же свойству влечет

$$A_2 + (B_1 \setminus C) \preceq B_2 + (B_1 \setminus C).$$

Замечая, что $B_1 + (A_2 \setminus C) = A_2 + (B_1 \setminus C) = B_1 \cup A_2$, и пользуясь транзитивностью отношения $\preceq$, получаем

$$A_1 + (A_2 \setminus C) \preceq B_2 + (B_1 \setminus C).$$

Свойство 4.1.4 позволяет добавить к каждой из частей последнего неравенства множество C:

$$A_1 + (A_2 \setminus C) + C \preceq B_2 + (B_1 \setminus C) + C,$$

а это эквивалентно

$$A_1 + A_2 \preceq B_1 + B_2,$$

что и требовалось. Доказательство для случая $A_1 \prec A_2$ проводится аналогично. $\diamond$

Из предыдущего по индукции легко получается

Предложение 4.5 *Пусть* $A_i \preceq B_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \preceq \sum_{i=1}^{n} B_i,$$

причем наличие хотя бы одного строгого отношения правдоподобия, например, $A_1 \prec B_1$, *влечет*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \prec \sum_{i=1}^{n} B_i.$$

Предложение 4.6 *Для произвольных* $A, B \in \mathcal{B}$

$$A \preceq B \iff A^c \succeq B^c.$$

Доказательство. Обозначим $C = AB = A \cap B$. По свойству 4.1.4 из $A \preceq B$ вытекает $A \setminus C \preceq B \setminus C$, или, что то же самое, $AB^c \preceq BA^c$. Применяя еще раз то же свойство, добавим к обеим частям последнего соотношения A^cB^c, получим $AB^c + A^cB^c \preceq BA^c + A^cB^c$, то есть $B^c \preceq A^c$, что и требовалось. Обратная импликация представляет собой по сути то же утверждение. $\diamond$

Предложение 4.7 *Если* $A, B \in \mathcal{B}$ *и* $A \subseteq B$, *то* $A \preceq B$.

Доказательство. По свойству 4.1.1 имеем $\emptyset \preceq B \setminus A$, что вместе со свойством 4.1.4 влечет $A = \emptyset + A \preceq B \setminus A + A = B$. $\diamond$

Из свойства 4.1.3 и предложения 4.6 непосредственно вытекает

Предложение 4.8 *Пусть* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ *– возрастающая последовательность и* $A_i \preceq B$ *при некотором* $B \in \mathcal{B}$ *и всех* $i = 1, 2, \ldots$. *Тогда*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \preceq B.$$

Следующее предложение представляет собой обобщение свойства 4.1.2 на счетное количество слагаемых.

Предложение 4.9 *Пусть* $A_1, A_2, \ldots$ *– последовательность попарно непересекающихся множеств из* $\mathcal{B}$, *а* $B_1, B_2, \ldots$ *также образуют последовательность попарно непересекающихся множеств, причем* $A_i \preceq B_i$, $i = 1, 2, \ldots$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \preceq \sum_{i=1}^{\infty} B_i. \tag{4.8}$$

Если, кроме того, при некотором $j \geq 1$ *справедливо* $A_j \prec B_j$, *то*

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \prec \sum_{i=1}^{\infty} B_i. \tag{4.9}$$

Доказательство. Из предложения 4.5 имеем

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \preceq \sum_{i=1}^{n} B_i, \quad n = 1, 2, \dots,$$

что вместе с предложением 4.7 дает

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \preceq \sum_{i=1}^{\infty} B_i, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Применяя предложение 4.8, отсюда получаем (4.8).

Для доказательства (4.9) достаточно заметить, что, по предложению 4.5 имеем

$$\sum_{i=1}^{j} A_i \prec \sum_{i=1}^{j} B_i, \quad \sum_{i=j+1}^{\infty} A_i \preceq \sum_{i=j+1}^{\infty} B_i,$$

и применить предложение 4.4. $\diamond$

Следствие 4.10 *Пусть $A_1, A_2, \dots$ – последовательность попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{B}$, а $B_1, B_2, \dots$ также образуют последовательность попарно непересекающихся множеств, причем $A_i \sim B_i$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \sim \sum_{i=1}^{\infty} B_i. \tag{4.10}$$

Доказательство получается двукратным применением (4.8).

Доказательство теоремы 4.3. Обозначим X случайную величину с равномерным распределением, которая существует по предположению 4.1.1, а $H(x) = X^{-1}([0, x])$, $x \in [0, 1]$ – прообраз отрезка $[0, x]$ при отображении X. Для $B \in \mathcal{B}$ обозначим $I(B) = \{x \in [0, 1] |\ B \preceq H(x)\}$ совокупность точек x из отрезка $[0, 1]$, для которых прообраз отрезка $[0, x]$ при отображении X не менее правдоподобен, чем B. Для любого $B \in \mathcal{B}$ имеем $I(B) \neq \emptyset$, поскольку всегда $\mathcal{R} = H(1) \succeq B$, так что $1 \in I(B)$. Обозначим еще $x_B = \inf I(B)$ и напомним, что $\widetilde{\mathcal{B}}$ обозначает фактор-множество $\mathcal{B}$ по отношению эквивалентности $\sim$, $K : \mathcal{B} \to \widetilde{\mathcal{B}}$ есть каноническое отображение, ставящее в соответствие событию $B \in \mathcal{B}$ его класс эквивалентности $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}$, а $\leq$ – линейный порядок, порожденный на $\widetilde{\mathcal{B}}$ отношением правдоподобия $\preceq$.

Покажем, что разбиение фактор-множества $\widetilde{\mathcal{B}}$ на классы эквивалентности имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \sum_{x \in [0,1]} K(H(x)), \tag{4.11}$$

то есть, в каждом классе эквивалентности найдется элемент вида $H(x)$ при некотором $x \in [0, 1]$. Для этого зафиксируем произвольное событие $B \in \mathcal{B}$. Если $B \sim \emptyset$ то, очевидно, $H(0) \in K(B)$. Аналогично, $B \sim \mathcal{R}$ влечет $H(1) \in K(B)$.

Пусть теперь $\emptyset \prec B \prec \mathcal{R}$. Рассмотрим невозрастающую последовательность $x_n \to x_B$, тогда $H(x_n) \succeq B$, причем последовательность $H(x_n)$ является невозрастающей по включению, поэтому свойство 4.1.3 влечет

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H(x_n) = H(x_B) \succeq B.$$

С другой стороны, для неубывающей последовательности $x_n \to x_B$ с помощью предложения 4.8 получаем

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H(x_n) \preceq B.$$

Поскольку

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H(x_n) = X^{-1}([0, x_B)) \sim H(x_B),$$

окончательно имеем $B \sim H(x_B)$.

Ввиду (4.11) на $\widetilde{\mathcal{B}}$ можно определить функционал $\widetilde{P}: \ \widetilde{\mathcal{B}} \to [0,1]$, ставящий в соответствие классу эквивалентности $K(H(x))$ число x. Функционал $\widetilde{P}$, в свою очередь, порождает функционал $P: \ \mathcal{B} \to [0,1]$ по правилу

$$P(B) = \widetilde{P}(K(B)), \ B \in \mathcal{B}. \tag{4.12}$$

Покажем, что P является искомым вероятностным распределением. Очевидно, $P(B) \geq 0$, $B \in \mathcal{B}$ и $P(\mathcal{R}) = 1$ ввиду $\mathcal{R} = H(1)$, поэтому осталось показать σ – аддитивность (4.12). Пусть $A_1, A_2, \ldots$ – последовательность попарно непересекающихся событий, и пусть $x_k \in [0,1]$ таковы, что $H(x_k) \sim A_k, \ k = 1, 2, \ldots$. Обозначим $x_0 = 0, \ \Delta_k = (x_{k-1}, x_k], \ B_k = X^{-1}(\Delta_k), \ k = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $P(B_k) = x_k$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k = X^{-1}((0, \sum_{k=1}^{\infty} x_k]),$$

поэтому

$$P(\sum_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Кроме того, $A_k \sim B_k, \ k = 1, 2, \ldots$, поэтому, учитывая следствие 4.10, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k,$$

откуда

$$P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$$

что и означает σ – аддитивность P. Таким образом, P действительно задает вероятностное распределение на $\mathcal{B}$.

Покажем теперь, что не существует другого вероятностного распределения, согласованного с исходным отношением правдоподобия. Предположим противное: существует вероятностное распределение $Q : \mathcal{B} \to [0,1]$, и для некоторого $B \in \mathcal{B}$ выполняется $Q(B) < P(B)$. Обозначим $\beta = P(B) - Q(B) > 0$, выберем целое $N > 1/\beta$ и наименьшее целое M, при котором выполняется $\frac{M}{N}P(B) \geq 1$. Далее, обозначим $\delta = P(B)/N$, $\Delta_1 = [0,\delta]$, $\Delta_k = ((k-1)\delta, k\delta]$, $k = 2,\ldots,M-1$, $\Delta_M = ((M-1)\delta, 1]$. Ясно, что длины интервалов Δ_k, $k = 1,2,\ldots,M$ не превышают δ, и

$$\sum_{k=1}^{M} \Delta_k = [0,1],$$

причем $Q(X^{-1}(\Delta_k)) = Q(B)/N,\ k = 1,2,\ldots,M-1$, и $Q(X^{-1}\Delta_M)) \leq Q(B)/N$ поэтому

$$\begin{aligned} Q(\mathcal{R}) &\leq \frac{M}{N}Q(B) = \frac{M-1}{N}P(B) + \frac{1}{N}P(B) - \frac{M}{N}\beta \\ &< \frac{M-1}{N}P(B) + \frac{P)B) - M\beta}{N} < \frac{M-1}{N}P(B) < 1, \end{aligned}$$

что является противоречием. Предположение $Q(B) > P(B)$ приводит к противоречию аналогично. Таким образом, распределение P единственно, и теорема 4.3 полностью доказана. $\diamond$

4.2 Отношение предпочтения

Как мы уже видели ранее, задание меры риска на множестве распределений порождает на нем отношение предпочтения. Значительный интерес представляет решение обратной задачи: нахождение меры риска, согласованной с заданным отношением предпочтения. В данном параграфе мы исследуем условия, при которых можно гарантировать существование такой меры риска для вещественных распределений.

4.2.1 Предположения

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое выпуклое множество функций распределения на измеримом пространстве $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, где $\mathbf{R}$ – множество вещественных чисел, а $\mathcal{B}$ – борелевская σ-алгебра на $\mathbf{R}$. В качестве $\mathcal{F}$ может выступать множество всех функций распределения, обладающих конечными моментами до некоторого фиксированного порядка. Мы будем предполагать, что множество $\mathcal{F}$ симметрично, то есть $F \in \mathcal{F}$ влечет $F^c \in \mathcal{F}$, где F^c обозначает двойственную функцию распределения для F относительно канонического реверса на $\mathbf{R}$ (см. параграф 1.5).

Пусть на $\mathcal{F}$ задано отношение предпочтения $\preceq$, то есть полное транзитивное отношение. Мы будем считать выполненными следующие предположения.

Предположение 4.2.1 *Отношение предпочтения $\preceq$ согласовано с порядком стохастического доминирования $\leq_s$: для $F, G \in \mathcal{F}$*

$$F <_s G \implies F \prec G. \tag{4.13}$$

Для последовательности функций распределения $F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{F}$, неубывающей по стохастическому доминированию: $F_1 \leq_s F_2 \leq_s \ldots$, можно определить предел $\lim_{i\to\infty} F_i = F$ по правилу

$$F(x) = \inf_i F_i(x),\ x \in \mathbf{R}. \tag{4.14}$$

Аналогично, для невозрастающей последовательности функций распределения $F_1 \geq_s F_2 \geq_s \ldots$ определяется предел $F = \lim_{i\to\infty} F_i$:

$$F(x) = \sup_i F_i(x),\ x \in \mathbf{R}. \tag{4.15}$$

Предположение 4.2.2 *Пусть $F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{F}$ – последовательность функций распределения, неубывающая в смысле стохастического доминирования и ограниченная по предпочтению некоторой функцией распределения $G \in \mathcal{F}$: $F_i \preceq G,\ i = 1, 2, \ldots$. Тогда предельная функция распределения $F = \inf_i F_i$ ограничена по предпочтению: $F \preceq G$.*

Отметим, что предельная функция F а (4.14) и (4.15), вообще говоря, может и не быть функцией распределения. Например, для последовательности вырожденных функций распределения (см. (2.6)) $W_n,\ n = 1, 2, \ldots$ и $W = \lim_{i\to\infty} W_i$ имеем $W(x) \equiv 0$. Формулировка предположения 4.2.2 подразумевает, что предельная функция F *является* функцией распределения.

Предположение 4.2.3 *Симметрия. Отношение предпочтения $\preceq$ является симметричным, то есть для произвольных $F, G \in \mathcal{F}$*

$$F \preceq G \implies F^c \succeq G^c. \tag{4.16}$$

Отметим, что ввиду симметричности канонического реверса в (4.16) справедлива и обратная импликация.

Предположение 4.2.4 *Непрерывность предпочтения относительно смеси распределений. Если функции распределения $F, G, H \in \mathcal{F}$ упорядочены по предпочтению следующим образом: $F \preceq G \preceq H$, то существует $p \in [0, 1]$ такое, что $G \sim pF + (1-p)H$.*

Здесь предполагается непрерывная согласованность отношения предпочтения с линейной структурой множества функций распределения: для всякой функции распределения G, лежащей "между"F и H в смысле отношения предпочтения, найдется эквивалентная G функция распределения, лежащая "между"F и H в смысле операции смеси распределений.

В следующем предположении требуется существование "детерминированного эквивалента"для бернуллиевских распределений (2.7).

Предположение 4.2.5 *Для произвольной функции распределения Бернулли* $B_{a,b,p}$ *найдется вырожденная функция распределения* W_c *такая, что* $W_c \sim B_{a,b,p}$.

Отметим, что $B_{a,b,p} = pW_b + (1-p)W_a$ и, ввиду согласованности предпочтения с порядком стохастического доминирования, с необходимостью $c \in [a, b]$, однако, в отличие от линейной теории [15], здесь не предполагается, что $c = pb+(1-p)a$.

4.2.2 Существование меры риска

Теорема 4.11 *Пусть на множестве функций распределения* $\mathcal{F}$ *на* $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ *задано отношение предпочтения* $\preceq$, *для которого выполнены предположения 4.2.1 – 4.2.5. Тогда существует единственная (с точностью до строго монотонных преобразований) мера риска* $\mu : \ \mathcal{F} \to \mathbf{R}$, *монотонная относительно* $\preceq$.

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько лемм, в которых считаются выполненными предположения 4.2.1 – 4.2.5.

Лемма 4.12 *Пусть* $F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *– невозрастающая последовательность функций распределения, ограниченная снизу по предпочтению некоторой функцией распределения* $G \in \mathcal{F}$: $F_i \succeq G, \ i = 1, 2, \ldots.$ *Тогда*

$$\lim_{i\to\infty} F_i \succeq G. \tag{4.17}$$

Доказательство. Поскольку для произвольных $F, H \in \mathcal{F}$ соотношение $F \geq_s H$ влечет, очевидно, $F^c \leq_s H^c$, из условий леммы вытекает, что $F_1^c, F_2^c, \ldots$ образуют неубывающую (относительно стохастического доминирования) последовательность функций распределения, причем (4.16) влечет $F_i^c \preceq G^c, \ i = 1, 2, \ldots$. По предположению 4.2.2 отсюда имеем $\lim_{i\to\infty} F_i^c \preceq G^c$, что ввиду предположения 4.2.3 с учетом равенства $\lim_{i\to\infty} F_i^c = (\lim_{i\to\infty} F_i)^c$ эквивалентно утверждению леммы. $\diamond$

Лемма 4.13 *Для произвольной функции распределения $F \in \mathcal{F}$ найдутся вырожденные распределения $W_a, W_b \in \mathcal{F}$ такие, что $W_a \preceq F \preceq W_b$.*

Доказательство. Предположим противное: для произвольного $b \in \mathbf{R}$ выполняется $F \succ W_b$, и рассмотрим последовательность функций распределения W_n, $n = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность является, очевидно, неубывающей по стохастическому доминированию, следовательно, по предположению 4.2.2, ее предел $W = \lim_n W_n$ является функцией распределения, и $W \preceq F$, что противоречит тому очевидному факту, что $W \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает соотношение $F \preceq W_b$ при некотором $b \in \mathbf{R}$. Второе утверждение $W_a \preceq F$ доказывается аналогично с помощью леммы 4.12. $\diamond$

Лемма 4.14 *Для произвольной функции распределения $F \in \mathcal{F}$ найдется единственное вырожденное распределение W_c такое, что $W_c \sim F$.*

Доказательство. По лемме 4.13 найдутся $a, b \in \mathbf{R}$ такие, что $W_a \preceq F \preceq W_b$. Далее, из предположения 4.2.4 вытекает, что при некотором $p \in [0, 1]$ справедливо $F \sim (1-p)W_a + pW_b$. Поскольку смесь вырожденных распределений W_a, W_b представляет собой распределение Бернулли $B_{a,b,p}$, имеем $F \sim B_{a,b,p}$. Существование нужного вырожденного распределения вытекает теперь из предположения 4.2.5: $W_c \sim B_{a,b,p} \sim F$, а его единственность следует из предположения 4.2.1. $\diamond$

Доказательство теоремы 4.11. По лемме 4.14 для каждой функции распределения $F \in \mathcal{F}$ найдется единственное эквивалентное ей вырожденное распределение W_c. Поэтому фактор-множество $\widetilde{\mathcal{F}}$ по отношению эквивалентности $\sim$, порожденному отношением предпочтения $\preceq$, является вещественно-подобным, и утверждение теоремы вытекает из предложения 1.11. $\diamond$

Меры риска, согласованные с отношением предпочтения, удовлетворяющим условиям теоремы 4.11, легко поддаются полному описанию. Обозначим $C \subseteq \mathbf{R}$ множество всех чисел $c \in \mathbf{R}$, для которых $W_c \in \mathcal{F}$. Поскольку каждый класс эквивалентности $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ содержит в точности одну вырожденную функцию распределения W_c, где $c = c(\widetilde{F})$, одна из таких мер риска имеет вид

$$\mu(F) = c(K(F)),\ F \in \mathcal{F}, \tag{4.18}$$

где $K:\ \mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}}$ – каноническое отображение $\mathcal{F}$ в фактор-множество $\widetilde{\mathcal{F}}$, а все другие могут быть записаны в форме

$$\nu(F) = f(\mu(F)),\ F \in \mathcal{F},$$

где f – произвольная строго возрастающая функция на C.

4.3 Ограниченность множеств распределений

Условимся отмечать отрезки, задаваемые отношением стохастического доминирования, индексом s, например, $(\leftarrow, G]_s = \{F \in \mathcal{F} | \ F \leq_s G\}$, а за отрезками, образованными отношением предпочтения, сохраним прежнее обозначение: $(\leftarrow, H] = \{F \in \mathcal{F} | \ F \preceq H\}$. Из предположения 4.2.1 с учетом очевидного соотношения $F \sim F, \ F \in \mathcal{F}$ вытекает следующее утверждение: для произвольной функции распределения $F \in \mathcal{F}$ найдется функция распределения $G \in \mathcal{F}$ такая, что

$$(\leftarrow, F]_s \subseteq (\leftarrow, G],$$

то есть, множества, ограниченные сверху по стохастическому доминированию, являются ограниченными сверху и по предпочтению. Интересно заметить, что обратное заключение, вообще говоря, неверно. В настоящем параграфе мы рассмотрим соответствующие примеры для отношений предпочтения, порожденных известными мерами риска.

4.3.1 Линейное отношение предпочтения

Предложение 4.15 *Пусть $\mathcal{R} = \mathbf{R}_+$, а отношение предпочтения индуцировано мерой ожидаемой полезности*

$$\mu(F) = \int_0^\infty U(x)\,dF(x), \tag{4.19}$$

где $U : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ - неубывающая функция полезности, $U(0) = 0$. Если выполняется

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = \infty, \tag{4.20}$$

то для произвольной функции распределения $G \in \mathcal{F}$ существует $H = H(G) \in \mathcal{F}$ такая, что $(\leftarrow, G] \subseteq (\leftarrow, H]_s$. Если же U ограничена на $\mathbf{R}_+$, то интервал $(\leftarrow, G]$ не ограничен по стохастическому доминированию.

Доказательство. Для $F \in (\leftarrow, G]_s$ и произвольного $y \in \mathbf{R}_+$ имеем:

$$\begin{aligned} \mu(G) \geq \mu(F) = \int_0^\infty U(x)\,dF(x) &\geq \int_y^\infty U(x)\,dF(x) \\ \geq U(y) \int_y^\infty dF(x) &= U(y)(1 - F(y)), \quad y > 0, \end{aligned} \tag{4.21}$$

откуда

$$F(y) \geq 1 - \frac{\mu(G)}{U(y)}, \quad y > 0. \tag{4.22}$$

Пусть сначала выполнено (4.20). Обозначим a произвольное число, для которого $U(a) \geq \mu(G)$, и зададим функцию распределения H в виде

$$H(y) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 - \mu(G)/U(y), & x \geq a. \end{cases}$$

(4.22) влечет $F(y) \geq H(y),\ y \in \mathbf{R}_+$, что и означает $F \in (\leftarrow, H]_s$.

Пусть теперь (4.20) не выполняется, и

$$\overline{U} = \sup_{x \in \mathbf{R}_+} U(x) = \lim_{x \to \infty} U(x) < \infty.$$

Если G является максимальным элементом $\mathcal{F}$ по предпочтению, то $(\leftarrow, G] = \mathcal{F}$, и, конечно, не является ограниченным по стохастическому доминированию. Если же G не является максимальным, то $\mu(G) < \overline{U}$, и отрезок $(\leftarrow, G]$ содержит семейство функций распределения

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 1 - \mu(G)/\overline{U}, & 0 \leq x < \lambda, \\ 1, & \lambda \leq x. \end{cases}, \quad \lambda > 0,$$

которое не является ограниченным по стохастическому доминированию. $\diamond$

4.3.2 Нелинейное отношение предпочтения

Пусть $g: \ [0,1] \to [0,1]$ – неубывающая функция, $g(0) = 0,\ g(1) = 1$, $\mathcal{R} = \mathbf{R}_+$, $\mathcal{F}$ – совокупность функций распределения на $\mathbf{R}_+$. Рассмотрим меру риска [140]

$$\pi(F) = \int_0^\infty g(1 - F(x))\, dx \tag{4.23}$$

и порожденное ей отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{F}$. Как обычно, $(\leftarrow, G]$ обозначает интервал $\{F \in \mathcal{F} |\ F \preceq G\}$.

Предложение 4.16 *Пусть*

$$g(t) > 0, \quad t > 0. \tag{4.24}$$

Тогда всякий отрезок вида $(\leftarrow, G]$, где $\pi(G) < \infty$, ограничен в смысле стохастического доминирования, а именно, $F \in (\leftarrow, G]$ влечет $F \leq_s H$, где функция распределения H имеет вид

$$H(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \pi(G), \\ 1 - g^{-1}\left(\pi(G)/x\right), & \pi(G) \leq x. \end{cases} \tag{4.25}$$

Если же условие (4.24) не выполнено, то отрезки вида $(\leftarrow, G]$ не ограничены в смысле стохастического доминирования.

Доказательство. Сначала отметим, что при выполнении условия (4.24) функция (4.25) является функцией распределения. Для произвольных $y > 0$ и $F \in (\leftarrow, G]$ имеем

$$\pi(G) \geq \pi(F) = \int_0^\infty g(1 - F(x)\, dx \geq \int_0^y g(1 - F(x))\, dx$$
$$\geq \int_0^y g(1 - F(y))\, dx = yg(1 - F(y)),$$

откуда

$$F(y) \geq 1 - g^{-1}(\pi(G)/y), \quad y \geq \pi(G),$$

что и влечет требуемое утверждение.

Пусть теперь (4.24) не выполнено, то есть функция g равна 0 в некоторой окрестности нуля $[0, a)$, $a > 0$. Рассмотрим семейство функций распределения $\{F_\lambda,\ \lambda > 0\}$ вида

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 1 - a/2, & 0 \leq x < \lambda, \\ 1, & \lambda \leq x. \end{cases} \tag{4.26}$$

Поскольку $1 - F_\lambda(x) \leq a/2,\ x \geq 0$, получаем $\pi(F_\lambda) = 0$ при любом $\lambda > 0$, однако семейство (4.26), очевидно, не ограничено в смысле стохастического доминирования. $\diamond$

Глава 5

Процессы риска

В данной главе изучаются динамические задачи теории риска, а именно – процессы риска. Проблема измерения риска в этом случае значительно сложнее, чем в статических постановках, рассмотренных ранее. Наиболее распространенной мерой риска в динамических задачах является вероятность разорения (или дополнительного события – выживания) процесса, изучение которой и составляет основное содержание главы. В параграфе 5.1 описывается классический процесс риска, подвергавшийся интенсивному изучению на протяжении всего двадцатого века. В следующем параграфе вводится агрегированный процесс риска, изучаются его свойства и выводится уравнение для вероятности его выживания. Параграф 5.3 посвящен методам решения полученного уравнения. В заключительном параграфе описывается процедура взаимной аппроксимации классического и агрегированного процессов риска, позволяющая переносить суждения о свойствах процессов с одного вида на другой, и служащая для приближенного вычисления характеристик процессов.

5.1 Классический процесс риска

5.1.1 Определение

Рассмотрим пуассоновский поток событий интенсивности $\lambda > 0$, наступающих в моменты времени $0 < T_1 < T_2 < ...$, при этом интервалы времени $\theta_i = T_{i+1} - T_i,\ i = 1, 2, ...$ между последовательными событиями независимы и имеют одинаковое показательное распределение с параметром λ:

$$\mathbf{P}\{\theta_i \le v\} = 1 - \exp(-\lambda v), \quad v \ge 0. \tag{5.1}$$

Пусть $\widetilde{Z}_i,\ i = 1, 2, ...$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения

$$\widetilde{F}(v) = \mathbf{P}\{Z_1 \le v\}; \quad F^{(c)}(0) = 0, \tag{5.2}$$

а

$$N(t) = \max\{k : \ T_k \le t\} - \tag{5.3}$$

количество событий на отрезке $[0, t]$; известно [37], что $N(t)$ является случайной величиной с распределением Пуассона

$$\mathbf{P}\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5.4}$$

Классический процесс риска есть случайный процесс в непрерывном времени, задаваемый соотношением

$$\widetilde{X}(t) = x + \widetilde{c}t - \sum_{i=1}^{N(t)} \widetilde{Z}_i, \quad t \ge 0, \tag{5.5}$$

где $x > 0$ – начальный капитал процесса, $\widetilde{c} > 0$ – скорость премиальных поступлений.

Отметим здесь, что процесс (5.5) может быть записан также в приращениях:

$$\widetilde{X}(0) = x; \quad \widetilde{X}(t) = \widetilde{X}(s) + \widetilde{c}(t - s) - \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} \widetilde{Z}_i, \ t > s. \tag{5.6}$$

Обозначим $\mathcal{F}$ класс всевозможных функций распределения на вещественной оси, $\mathcal{F}_+ = \{F \in \mathcal{F} : \ F(0-) = 0\}$ – класс функций распределения, сосредоточенных на неотрицательной полуоси. Процесс вида (5.5), зависящий от параметров $x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda$ будем обозначать $\widetilde{X} = \widetilde{X}(x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda)$, а класс всех таких процессов обозначим $\widetilde{\mathbf{X}}$:

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \left\{\widetilde{X} = \widetilde{X}\left(x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda\right) \mid \ x \ge 0, \ \widetilde{c} > 0, \ \widetilde{F} \in \mathcal{F}_+, \ \lambda > 0\right\}. \tag{5.7}$$

Вероятностное пространство процесса $\widetilde{\mathbf{X}}$ будем обозначать $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mathbf{P}})$, трактуя его элементы $\omega \in \widetilde{\Omega}$, как траектории процесса $\widetilde{\mathbf{X}}$.

5.1.2 Разорение процесса

Разорением процесса (5.5) назовем событие

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \{\omega \in \Omega | \ \exists t > 0 : \ \widetilde{X}(t) \le 0\}, \tag{5.8}$$

а выживанием – дополнительное событие

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \Omega \setminus \widetilde{\mathcal{R}} = \{\omega \in \Omega | \ \forall t > 0 : \ \widetilde{X}(t) > 0\}. \tag{5.9}$$

Введем также аналогичные понятия для конечного горизонта времени $[0, T]$:

$$\widetilde{\mathcal{R}}_T = \{\omega \in \Omega |\ \exists 0 < t \leq T:\ \widetilde{X}(t) \leq 0\}, \tag{5.10}$$

$$\widetilde{\mathcal{S}}_T = \Omega \setminus \widetilde{\mathcal{R}}_T = \{\omega \in \Omega |\ \forall t \in (0, T]:\ \widetilde{X}(t) > 0\}. \tag{5.11}$$

Момент разорения есть (вообще говоря, несобственная) случайная величина

$$\widetilde{\tau} = \min\{t > 0:\ \widetilde{X}(t) \leq 0\}, \tag{5.12}$$

равная по определению $+\infty$ на $\widetilde{\mathcal{S}}$. Аналогично определяется момент разорения для конечного горизонта времени

$$\widetilde{\tau}_T = \min\{t \in (0, T]:\ \widetilde{X}(t) \leq 0\}. \tag{5.13}$$

Вероятность разорения процесса (5.5) есть вероятность события (5.8):

$$\widetilde{R}(x) = \widetilde{R}(x, \widetilde{c}.\widetilde{F}, \lambda) = \widetilde{\mathbf{P}}(\widetilde{\mathcal{R}}(x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda)). \tag{5.14}$$

5.2 Агрегированный процесс риска

5.2.1 Определение

Пусть $Z_1, Z_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F \in \mathcal{F}_+$. Агрегированным процессом риска называется процесс в дискретном времени вида

$$X(n) = x + cn - \sum_{k=1}^{n} Z_k, \ \ n = 0, 1, 2, ... \tag{5.15}$$

Здесь x – начальный капитал процесса, c – скорость премиальных поступлений, $Z_k,\ k = 1, 2, ...$ – страховые убытки. Отметим, что процесс (5.15) может быть также записан в виде

$$X(0) = x; \quad X(n) = X(n-1) + c - Z_n, \ \ n = 1, 2, ... \tag{5.16}$$

Нам понадобится понятие отрезка процесса; при фиксированных $t < T$ будем называть так

$$X_{t,T}(n) = X(t) + cn + \sum_{k=1}^{n} Z_{k+t}, \ \ n = 1, 2, \dots, T - t. \tag{5.17}$$

Ясно, что $X_{0,\infty}(n) = X(n)$ при всех $n = 1, 2, \dots$ и $X_{t,T}(n) = X(n+t)$ при $0 < n \leq T - t$. В частности, при $t = 0$ и конечном T получается процесс на конечном горизонте времени, а при $T = \infty$ – хвостовой процесс:

$$X_t(n) = X(t) + cn + \sum_{k=1}^{n} Z_{k+t}, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{5.18}$$

Процесс (5.15) вполне определяется значениями параметров x, c, F, поэтому будем обозначать его $X = X(x, c, F)$, а класс всех таких процессов обозначим

$$\mathbf{X} = \{X(x, c, F) |\ x \geq 0,\ c > 0, F \in \mathcal{F}_+\} \tag{5.19}$$

Вероятностное пространство процесса $X \in \mathbf{X}$ будем обозначать $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, а его элементы $\omega \in \Omega = \Omega(x, c, F)$ трактовать, как траектории процесса. Каждая такая траектория (при фиксированных значениях параметров x, c, F) однозначно описывается последовательностью $(\omega_1, \omega_2, \dots)$, где $\omega_k \in \mathbf{R}_+$ представляют собой реализации Z_k, $k = 1, 2, \dots$, то есть, $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ представимо в виде произведения счетного количества экземпляров вероятностного пространства $(\mathbf{R}_+, \mathbf{B}, \mathbf{P}_F)$, где $\mathbf{B}$ – борелевская σ-алгебра на $\mathbf{R}_+$, а распределение $\mathbf{P}_F$ на $(\mathbf{R}_+, \mathbf{B})$ задано функцией распределения F.

При фиксированных c, F и $t < T$ обозначим

$$\Omega_{t,x}^{T,y} = \{\omega \in \Omega |\ X(t) = x,\ X(T) = y\}, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

множество траекторий, начинающихся в момент времени t в точке x, и приводящих в момент времени T в точку y. Далее,

$$\Omega_{t,x} = \{\omega \in \Omega |\ X(t) = x\} = \bigcup_{y, T > t} \Omega_{t,x}^{T,y}, \quad x \in \mathbf{R}$$

обозначает множество всех траекторий процесса, проходящих в момент времени t через точку x, в частности, $\Omega_x = \Omega_{0,x}$ – множество всех траекторий процесса при начальном капитале x.

Определим для отрезка $X_{t,T}(x, c, F)$ процесса $X = X(x, c, F) \in \mathbf{X}$ события разорения и выживания

$$\mathcal{R}_{t,T} = \mathcal{R}_{t,T}(x, c, F) = \{\omega \in \Omega_{t,x} |\ \exists 0 < k \leq T - t : X_{t,T}(k) \leq 0, Z_{k+t} > 0\},$$

$$\mathcal{S}_{t,T} = \mathcal{S}_{t,T}(x, c, F) = \Omega_{t,x} \setminus \mathcal{R}_{t,T}(x, c, F),$$

в частности, для исходного процесса

$$\mathcal{R}_{0,\infty}(x, c, F) = \mathcal{R}(x, c, F) = \{\omega \in \Omega_x |\ \exists k > 0 : X(k) \leq 0, Z_k > 0\},$$

$$\mathcal{S}_{0,\infty}(x,c,F) = \mathcal{S}(x,c,F) = \Omega_x \setminus \mathcal{R}(x,c,F).$$

Отметим, что разорение в момент времени k наступает только в случае положительного убытка $Z_k > 0$. Момент разорения отрезка процесса $X_{t,T}$ будем обозначать

$$\tau_{t,T} = \tau_{t,T}(x,c,F) = \min\{k = 1,\dots,T-t|\ X_{t,T}(k) \le 0,\ Z_{k+t} > 0\}, \qquad (5.20)$$

в частности, для полного процесса, $\tau = \tau_{0,\infty}$.

Обозначим еще $\mathcal{S}^y_{t,T} = \mathcal{S}^y_{t,T}(x,c,F)$ множество всех траекторий $X_{t,T}$ из $S_{t,T}$, которые заканчиваются в точке y: $X_{t,T}(T-t) = y$. Отметим, что

$$\mathcal{S}^0_{t,T}(x,c,F) = \emptyset, \quad x > -c(T-t), \qquad (5.21)$$

и, вообще,

$$\mathcal{S}^y_{t,T}(x,c,F) = \emptyset; \quad y \le 0, \quad x \ne y - c(T-t), \qquad (5.22)$$

Тогда

$$\mathcal{S}_{t,T}(x,c,F) = \bigcup_y \mathcal{S}^y_{t,T}(x,c,F),$$

где объединение достаточно вычислить по тем y, для которых $\mathcal{S}^y_{t,T}(x,c,F) \ne \emptyset$. В частности,

$$\mathcal{S}_{0,T}(x,c,F) = \bigcup_{y\in[0,x+Tc]} \mathcal{S}^y_{0,T}(x,c,F).$$

Отсюда вытекает

Предложение 5.1 *При произвольном фиксированном $T = 1,2,\dots$ и $x \in \mathbf{R}$ справедливы представления*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(x,c,F) = \bigcup_{y\in(0,x+Tc]} \left(\mathcal{S}^y_{0,T}(x,c,F) \bigcap \mathcal{S}_{T,\infty}(y,c,F)\right), \quad x > -Tc, \qquad (5.23)$$

$$\mathcal{S}(x,c,F) = \mathcal{S}^{x+Tc}_{0,T}(x,c,F) \bigcap \mathcal{S}_{T,\infty}(x+Tc,c,F), \quad x \le -Tc, \qquad (5.24)$$

где $\mathcal{S}^{x+Tc}_{0,T}(x,c,F) = \{Z_1 = 0,\dots,Z_T = 0\}$.

Введем еще обозначения для вероятностей выживания и разорения

$$R_{t,T} = R_{t,T}(x,c,F) = \mathbf{P}(\mathcal{R}_{t,T}(x,c,F)),$$

$$S_{t,T} = S_{t,T}(x,c,F) = \mathbf{P}(\mathcal{S}_{t,T}(x,c,F)) = 1 - R_{t,T},$$

$$R = R(x,c,F) = \mathbf{P}(\mathcal{R}(x,c,F)), \quad S = S(x,c,F) = \mathbf{P}(\mathcal{S}(x,c,F)) = 1 - R.$$

Ввиду независимости и одинаковой распределенности Z_k, $k = 1,2,\dots$ справедливо

Предложение 5.2 *Для произвольных $t < T \le \infty$ и x, c, F имеют место равенства*

$$S_{t,T}(x,c,F) = S_{0,T-t}(x,c,F), \quad R_{t,T}(x,c,F) = R_{0,T-t}(x,c,F). \tag{5.25}$$

5.2.2 Свойства агрегированного процесса

Для удобства дальнейших ссылок сформулируем некоторые свойства событий и вероятностей разорения и выживания в виде нескольких предложений, доказательства которых получаются непосредственно из определения.

Предложение 5.3 *Для произвольных $T_1 < T_2$ и фиксированных x, c, F выполняется*

$$\mathcal{R}_{0,T_1}(x,c,F) \subseteq \mathcal{R}_{0,T_2}(x,c,F) \subseteq \mathcal{R}(x,c,F),$$

$$\mathcal{S}_{0,T_1}(x,c,F) \supseteq \mathcal{S}_{0,T_2}(x,c,F) \supseteq \mathcal{S}(x,c,F),$$

$$R_{0,T_1}(x,c,F) \le R_{0,T_2}(x,c,F) \le R(x,c,F),$$

$$S_{0,T_1}(x,c,F) \ge S_{0,T_2}(x,c,F) \ge S(x,c,F).$$

Предложение 5.4 *Для произвольных фиксированных x, c, F справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\mathcal{R}(x,c,F) = \bigcup_{T=1}^{\infty} \mathcal{R}_{0,T}(x,c,F) = \lim_{T\to\infty} \mathcal{R}_{0,T}(x,c,F),$$

$$\mathcal{S}(x,c,F) = \bigcap_{T=1}^{\infty} \mathcal{S}_{0,T}(x,c,F) = \lim_{T\to\infty} \mathcal{S}_{0,T}(x,c,F),$$

$$R(x,c,F) = \lim_{T\to\infty} R_{0,T}(x,c,F), \quad S(x,c,F) = \lim_{T\to\infty} S_{0,T}(x,c,F).$$

Предложение 5.5 *Для произвольных $x_1 < x_2$ и фиксированных c, F выполняются соотношения:*

$$\mathcal{R}(x_1,c,F) \supseteq \mathcal{R}(x_2,c,F), \quad \mathcal{S}(x_1,c,F) \subseteq \mathcal{S}(x_2,c,F),$$

$$R(x_1,c,F) \ge R(x_2,c,F), \quad S(x_1,c,F) \le S(x_2,c,F).$$

Предложение 5.6 *Для произвольных $c_1 < c_2$ и фиксированных x, F выполняются соотношения:*

$$\mathcal{R}(x,c_1,F) \supseteq \mathcal{R}(x,c_2,F), \quad \mathcal{S}(x,c_1,F) \subseteq \mathcal{S}(x,c_2,F),$$

$$R(x,c_1,F) \ge R(x,c_2,F), \quad S(x,c_1,F) \le S(x,c_2,F).$$

Предложение 5.7 *Если $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_+$, и F_1 не превосходит F_2 в смысле стохастического доминирования, то есть $F_1(x) \geq F_2(x)$, $x \in \mathbf{R}_+$, то для произвольных фиксированных x, c выполняются соотношения:*

$$\mathcal{R}(x, c, F_1) \subseteq \mathcal{R}(x, c, F_2), \quad \mathcal{S}(x, c, F_1) \supseteq \mathcal{S}(x, c, F_2),$$

$$R(x, c, F_1) \leq R(x, c, F_2), \quad S(x, c, F_1) \geq S(x, c, F_2).$$

В следующем предложении знак стохастического доминирования $\preceq_s$ используется для сравнения случайных величин; при этом имеется в виду наличие такого отношения между функциями распределения этих случайных величин.

Предложение 5.8 *Момент разорения агрегированного процесса риска является монотонной случайной величиной (в смысле порядка стохастического доминирования) по всем своим аргументам:*

$$x_1 < x_2 \implies \tau(x_1, c, F) \preceq_s \tau(x_2, c, F),$$

$$c_1 < c_2 \implies \tau(x, c_1, F) \preceq_s \tau(x, c_2, F),$$

$$F_1 \preceq_s F_2 \implies \tau(x, c, F_1) \succeq_s \tau(x, c, F_2).$$

Сформулируем лемму о случайных блужданиях, доказательство которой можно найти в [37] (теоремы 12.1, 12.2). Напомним, что случайным блужданием называется процесс

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \tag{5.26}$$

где $Y_1, Y_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, и рассмотрим две связанные с блужданием U_n случайные величины

$$\mathbf{m} = \min_n U_n. \tag{5.27}$$

$$\mathbf{M} = \max_n U_n. \tag{5.28}$$

Лемма 5.9 *[37] Существует три типа случайных блужданий вида (5.26).*
а). Блуждание, уходящее в бесконечность ($\mathbf{E}Y_1 > 0$); при этом минимум (5.27) является собственной случайной величиной, а произвольный верхний уровень $a \in \mathbf{R}$ достигается с вероятностью 1:

$$\mathbf{P}\{U_n > a \text{ при некотором } n > 0\} = 1.$$

b). Блуждание, уходящее в минус бесконечность ($\mathbf{E}Y_1 < 0$)*; при этом максимум (5.28) является собственной случайной величиной а произвольный нижний уровень* $a \in \mathbf{R}$ *достигается с вероятностью 1:*

$$\mathbf{P}\{U_n < a \text{ при некотором } n > 0\} = 1.$$

c) Осциллирующий тип ($\mathbf{E}Y_1 = 0$)*; при этом минимум (максимум) с вероятностью 1 равен* $-\infty$ (∞)*, то есть для любого наперед заданного уровня* $a \in \mathbf{R}$ *вероятность его достижения траекториями случайного блуждания равна 1:*

$$\mathbf{P}\{U_n > a \text{ при некотором } n > 0\} = 1, \quad \mathbf{P}\{U_n < a \text{ при некотором } n > 0\} = 1.$$

5.2.3 Уравнение для вероятности выживания

В данном параграфе параметры c, F считаются фиксированными, поэтому будем опускать их в обозначениях событий выживания и их вероятностей.

Предложение 5.10 *Пусть параметры* c, F *процесса (5.15) фиксированы. Если* $c \leq \mathbf{E}Z_1$ *процесс (5.15) разоряется с вероятностью 1:* $S(x) = 1,\ x \in \mathbf{R}$*, а если* $c > \mathbf{E}Z_1$*, то функция* S *не убывает по* x*,* $S(x) > 0,\ x \in \mathbf{R}_+$*, причем*

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = 1.$$

Доказательство. Обозначим $Y_i = c - Z_i,\ i = 1, 2, \ldots$. Тогда агрегированный процесс риска связан со случайным блужданием (5.26) соотношением $X(n) = x + U_n,\ n = 1, 2, \ldots$. При $c \leq \mathbf{E}Z_1$ имеем $\mathbf{E}Y_1 \leq 0$, поэтому утверждение предложения вытекает из леммы 5.9 (b,c). Если же $c > \mathbf{E}Z_1$, то $\mathbf{E}Y_1 > 0$, и, по лемме 5.9, существует собственная случайная величина $\mathbf{m}$ (5.27). Обозначим ее функцию распределения $G(v) = \mathbf{P}\{\mathbf{m} \leq v\},\ v \in \mathbf{R}$. Тогда

$$R(x, c, F) = R(x) = \mathbf{P}\{\min_n X(n) \leq 0\} = \mathbf{P}\{\min_n U_n \leq -x\} = G(-x) \to 0$$

при $x \to \infty$, что эквивалентно $S(x) \to 1$. Монотонность S является прямым следствием предложения 5.5, а утверждение $S(0) > 0$ вытекает из уравнения (5.31). $\diamond$

Всюду далее будем предполагать, не оговаривая этого особо, что $c > \mathbf{E}Z_1$.

Отметим здесь, что процесс может оказаться неразоряющимся с положительной вероятностью и при отрицательных значениях начального капитала x. В следующей теореме случай $x \leq -c$ сводится к случаю $x > -c$.

Теорема 5.11 *Пусть параметры c, F процесса риска (5.15) фиксированы. Для $x \le -c$ вероятность выживания имеет вид*

$$S(x) = (F(0))^m S(x_0), \tag{5.29}$$

где

$$m = \left[-\frac{x}{c}\right], \quad x_0 = x + mc,$$

а $[z]$ – целая часть числа z, так что $-c < x_0 \le 0$.

Доказательство. С целью применения предложения 5.1 положим $T = m$, тогда из (5.23) вытекает

$$\mathcal{S}(x) = \bigcup_{y \in [0, x+mc]} \left(\mathcal{S}^y_{0,m}(x) \bigcap \mathcal{S}_{m,\infty}(y)\right).$$

Поскольку $x + mc \le 0$, событие $\mathcal{S}^y_{0,m}(x)$ для $y \in [0, x+mc]$ не пусто только в случае $Z_1 = \ldots = Z_m = 0$ (то есть, $y = x + mc$), так что

$$\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}^{x+mc}_{0,m}(x) \bigcap \mathcal{S}_{m,\infty}(x + mc) \tag{5.30}$$

и $\mathbf{P}\{\mathcal{S}^{x+mc}_{0,m}(x)\} = (F(0))^m$. Ввиду независимости событий, образующих пересечение в (5.30), получаем

$$S(x) = \mathbf{P}\{\mathcal{S}(x)\} = (F(0))^m S_{m,\infty}(x + mc).$$

По предложению 5.2 имеем $S_{m,\infty}(x + mc) = S(x + mc)$, поэтому предыдущее равенство влечет (5.29) $\diamond$

Теперь выведем уравнение для вероятности выживания.

Теорема 5.12 *Пусть параметры c, F фиксированы, тогда вероятность выживания $S(x)$, как функция начального капитала x, удовлетворяет на $(-c, \infty)$ интегральному уравнению*

$$S(x) = \int_{[0,x+c)} S(x + c - v)\, dF(v). \tag{5.31}$$

Доказательство. Пусть $x > -c$. Из (5.23) при $T = 1$ вытекает

$$\mathcal{S}(x) = \bigcup_{y \in (0, x+c]} \left(\mathcal{S}^y_{0,1}(x) \bigcap \mathcal{S}_{1,\infty}(y)\right). \tag{5.32}$$

Сделав замену переменных $y = x + c - v$, получим

$$\mathcal{S}(x) = \bigcup_{v \in [0, x+c)} \left(\mathcal{S}^{x+c-v}_{0,1}(x) \bigcap \mathcal{S}_{1,\infty}(x + c - v)\right). \tag{5.33}$$

Вычислим вероятности в обеих частях этого равенства:

$$S(x) = \int_{[0,x+c)} S_{1,\infty}(x+c-v)\, dF(v).$$

Ввиду предложения 5.2 функции $S_{1,\infty}$ и S совпадают, поэтому последнее равенство есть не что иное, как (5.31). $\diamond$

Таким образом, решив уравнение (5.31), по теоремам 5.11 и 5.12 можно вычислить вероятность выживания процесса (5.15) при любых значениях параметров x, c, F.

Тем же методом, что и теорема 5.12, получается уравнение для вероятности выживания на конечном горизонте времени.

Теорема 5.13 *Пусть параметры c, F фиксированы, а $T > 0$. Тогда*

$$S_{0,T}(x) = \int_{[0,x+c)} S_{0,T-1}(x+c-v)\, dF(v), \quad x > -c. \tag{5.34}$$

Отметим, что ввиду предложения 5.2 уравнение (5.34) может быть записано в виде

$$S_{t,T}(x) = \int_{[0,x+c)} S_{t+1,T}(x+c-v)\, dF(v), \quad x > -c,\ t < T. \tag{5.35}$$

5.2.4 Простейший процесс риска

Зафиксируем $p \in (1/2, 1)$ и рассмотрим частный случай процесса (5.15), в котором $c = 1$, а функция распределения F имеет вид

$$F(v) = \begin{cases} 0, & v < 0, \\ p, & 0 \le v < 2, \\ 1, & 2 \le v, \end{cases}$$

то есть случайные величины $Z_1, Z_2, \ldots$ принимают значения 0 и 2 с вероятностями p и $1-p$, соответственно. Тогда процесс представляется в виде случайного блуждания

$$X(n) = x + \sum_{k=1}^{n} Y_i,$$

где случайные величины $Y_i,\ i = 1, 2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и принимают значения 1 и -1 с вероятностями p и $1-p$, соответственно. Такой процесс описан в [37], 1.XIV.2, как классическая задача о разорении. Уравнение (5.31) приобретает в данном случае вид

$$S(x) = pS(x+1), \quad -1 < x \le 1, \tag{5.36}$$

$$S(x) = pS(x+1) + (1-p)S(x-1), \quad x > 1, \tag{5.37}$$

Решим его сначала для целочисленных $x = 1, 2, \ldots$. Для этого рассмотрим функцию $U(x)$, удовлетворяющую условиям

$$U(x) = S(x),\ x = 1, 2, \ldots \tag{5.38}$$

и $U(0) = 0$. Эта функция, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$U(x) = pU(x+1) + (1-p)U(x-1), \quad x = 1, 2, \ldots \tag{5.39}$$

с краевыми условиями

$$U(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} U(x) = 1.$$

Поскольку $p > 1/2$, решение уравнения (5.39) с такими краевыми условиями имеет вид

$$U(x) = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^x,\ x = 1, 2, \ldots$$

что вместе с (5.38) дает

$$S(x) = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^x,\ x = 1, 2, \ldots \tag{5.40}$$

Значения $S(x)$ при неположительных целых x получаются теперь из (5.36) и теоремы 5.11:

$$S(0) = 2p - 1, \quad S(x) = p^{-x}(2p-1),\ x = -1, -2, \ldots. \tag{5.41}$$

Выражения (5.40) и (5.41) определяют решение системы (5.36), (5.37) для всех целых x. Для остальных значений x решение получается из следующего простого наблюдения: $x \in (a-1, a]$ при некотором целом a влечет $S(x) = S(a)$.

Отметим, что полученное решение отличается от классических [37], [39] при $x \le 0$; это вызвано различием в понятиях разорения (выживания).

5.3 Решение уравнения выживания

Аналитическое решение уравнения (5.31) возможно лишь в простейших частных случаях, как, например, в предыдущем параграфе. Здесь мы рассмотрим численные методы решения этого уравнения.

5.3.1 Процесс с поглощением

Наряду с агрегированным процессом риска

$$X(0) = x, \quad X(n) = x + c - Z_n,\ n = 1, 2, \ldots \tag{5.42}$$

рассмотрим также процесс с поглощением. Зафиксируем $M > 0$ и построим процесс X^M, который ведет себя так же, как X до момента первого достижения или превышения уровня M, а начиная с этого момента принимает постоянное значение M. Такой процесс с помощью промежуточной переменной $\widetilde{X}(n)$ описывается следующими уравнениями: $X^M(0) = x$, а при $n = 1, 2, \ldots$:

$$X^M(n) = \min\{\widetilde{X}(n), M\}, \tag{5.43}$$

где

$$\widetilde{X}(n) = \begin{cases} X^M(n-1) + c - Z_n, & X^M(n-1) < M, \\ M, & X^M(n-1) \geq M \end{cases}. \tag{5.44}$$

Рассмотрим также отрезки процессов X, X^M на конечном горизонте времени $n = 0, 1, \ldots, T$. Величины, относящиеся к процессу X^M, будем отмечать верхним индексом M. Для событий выживания процессов имеем:

$$M_1 < M_2 \implies \mathcal{S}_{0,T}^{M_1} \supseteq \mathcal{S}_{0,T}^{M_2} \supseteq \mathcal{S}_{0,T}$$

и

$$\bigcap_{M \geq x} \mathcal{S}_{0,T}^{M} = \lim_{M \to \infty} \mathcal{S}_{0,T}^{M} = \mathcal{S}_{0,T}$$

(более того, $\mathcal{S}_{0,T}^{x+Tc} = \mathcal{S}_{0,T}$). Поэтому

$$S_{0,T}^{M_1} \geq S_{0,T}^{M_2} \geq S_{0,T}$$

и

$$\lim_{M \to \infty} S_{0,T}^{M} = S_{0,T}$$

(и $S_{0,T}^{x+Tc} = S_{0,T}$), причем сходимость монотонна по M.

Из сказанного выше и предложения 5.4 вытекает

Теорема 5.14 *Для произвольного агрегированного процесса риска $X(x, c, F)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся постоянные $M \geq x$ и $T > 0$ такие, что*

$$S_{0,T}^{M}(x, c, F) - \varepsilon \leq S(x, c, F) \leq S_{0,T}^{M}(x, c, F).$$

Таким образом, для приближенного вычисления вероятности выживания агрегированного процесса риска можно использовать процесс с поглощением на конечном горизонте времени.

Для процесса с поглощением разложение события выживания (5.23), (5.24) преобразуются при $T = 1, 2, \ldots$ и $x \in \mathbf{R}$ к виду

$$\mathcal{S}^M(x) = \Omega^M(x), \quad x \geq M,$$

$$\mathcal{S}^M(x) = \left[\bigcup_{y\in(0,M)} \left(\mathcal{S}_{0,T}^{M,y}(x) \bigcap \mathcal{S}_{T,\infty}^M(y)\right)\right] \bigcup \left[\bigcup_{y\in[M,x+Tc]} \mathcal{S}_{0,T}^{M,y}(x)\right], \ \ M-Tc \le x < M,$$

$$\mathcal{S}^M(x) = \bigcup_{y\in(0,x+Tc]} \left(\mathcal{S}_{0,T}^{M,y}(x) \bigcap \mathcal{S}_{T,\infty}^M(y)\right), \ \ -Tc < x < M - Tc,$$

$$\mathcal{S}^M(x) = \mathcal{S}_{0,T}^{M,x+Tc}(x) \bigcap \mathcal{S}_{T,\infty}^M(x+Tc), \ \ x \le -Tc.$$

Поскольку

$$\bigcup_{y\in[M,x+c]} \mathcal{S}_{0,1}^{M,y}(x) = \{Z_1 \in [0, x+c-M]\},$$

из разложений события выживания с помощью замены переменных $y = x+c-v$ при $T = 1$ получаются уравнения для вероятности выживания $S^M(x)$, $x \in \mathbf{R}$ этого процесса

$$S^M(x) = 1, \ \ x \ge M, \tag{5.45}$$

$$S^M(x) = \int_{(x+c-M,x+c)} S^M(x+c-v)\, dF(v) + F(x+c-M), \ \ M-c < x < M, \tag{5.46}$$

$$S^M(x) = \int_{[0,x+c)} S^M(x+c-v)\, dF(v), \ \ -c < x < M-c, \tag{5.47}$$

$$S^M(x) = F(0) S^M(x+c), \ \ x \le -c. \tag{5.48}$$

Далее рассмотрим процесс с поглощением на конечном горизонте времени $0, 1, \ldots, T$. Для произвольного $0 < t < T$ справедливы разложения события выживания вида

$$\mathcal{S}_{0,T}^M(x) = \Omega^M(x), \ \ x \ge M,$$

$$\mathcal{S}_{0,T}^M(x) = \left[\bigcup_{y\in(0,M)} \left(\mathcal{S}_{0,t}^{M,y}(x) \bigcap \mathcal{S}_{t,T}^M(y)\right)\right] \bigcup \left[\bigcup_{y\in[M,x+tc]} \mathcal{S}_{0,t}^{M,y}(x)\right], \ \ M-tc \le x < M,$$

$$\mathcal{S}_{0,T}^M(x) = \bigcup_{y\in(0,x+tc]} \left(\mathcal{S}_{0,t}^{M,y}(x) \bigcap \mathcal{S}_{t,T}^M(y)\right), \ \ -tc < x < M - tc,$$

$$\mathcal{S}_{0,T}^M(x) = \mathcal{S}_{0,t}^{M,x+tc}(x) \bigcap \mathcal{S}_{t,T}^M(x+tc), \ \ x \le -tc,$$

из которых получаются уравнения для вероятности выживания

$$S_{0,T}^M(x) = 1, \ \ x \ge M, \tag{5.49}$$

$$S_{0,T}^M(x) = F(x+c-M) + \int_{(x+c-M,x+c)} S_{1,T}^M(x+c-v)\, dF(v), \ \ M-c \le x < M, \tag{5.50}$$

$$S_{0,T}^M(x) = \int_{[0,x+c)} S_{1,T}^M(x+c-v)\, dF(v), \ \ -c < x < M-c, \tag{5.51}$$

$$S_{0,T}^M(x) = F(0) S_{1,T}^M(x+c), \ \ x \le -c, \tag{5.52}$$

5.3.2 Дискретный случай

Рассмотрим агрегированный процесс риска $X(x, c, F)$. Пусть распределение Z_1 сосредоточено на $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, то есть

$$\mathbf{P}\{Z_1 = m\} = p_m; \ \ p_m \geq 0, \ m = 0, 1, \ldots; \ \sum_{m=0}^{\infty} p_m = 1,$$

а параметры x, c являются целыми числами. Исключим из рассмотрения тривиальный случай вырожденного распределения, то есть, будем считать, что $p_k < 1, \ k = 0, 1, \ldots$. Для целых $M > 0$, $T > 0$ рассмотрим на конечном горизонте времени $0, 1, \ldots, T$ соответствующий процесс с поглощением $X_{0,T}^M$ и задачу вычисления вероятности его выживания. Уравнения (5.49) – (5.52) принимают в дискретном случае вид

$$S_{0,T}^M(x) = 1, \ \ x \geq M,$$

$$S_{0,T}^M(x) = \sum_{k=0}^{x+c-M} p_k + \sum_{k=x+c-M+1}^{x+c-1} S_{1,T}^M(x + c - k) p_k, \ \ M - c \leq x < M,$$

$$S_{0,T}^M(x) = \sum_{k=0}^{x+c-1} S_{1,T}^M(x + c - k) p_k, \ \ -c < x < M - c,$$

$$S_{0,T}^M(x) = p_0 S_{1,T}^M(x + c), \ \ x \leq -c.$$

Ввиду предложения 5.2 их можно переписать в виде

$$S_{t,T}^M(x) = 1, \ \ x \geq M, \tag{5.53}$$

$$S_{t,T}^M(x) = \sum_{k=0}^{x+c-M} p_k + \sum_{k=x+c-M+1}^{x+c-1} S_{t+1,T}^M(x + c - k) p_k, \ \ M - c \leq x < M, \tag{5.54}$$

$$S_{t,T}^M(x) = \sum_{k=0}^{x+c-1} S_{t+1,T}^M(x + c - k) p_k, \ \ -c < x < M - c, \tag{5.55}$$

$$S_{t,T}^M(x) = p_0 S_{t+1,T}^M(x + c), \ \ x \leq -c, \tag{5.56}$$

где t – произвольное целое число, удовлетворяющее условию $0 \leq t < T$. Кроме того, очевидно,

$$S_{T,T}^M(x) = 1, \ \ 1 \leq x \leq M. \tag{5.57}$$

На множестве целочисленных точек

$$\Theta = \{(t, x) | \ 0 \leq t \leq T, \ 0 \leq x \leq M\}$$

рассмотрим вспомогательную функцию $U(t, x)$, совпадающую с $S_{t,T}^M(x)$ при положительных x:

$$U(t, x) = S_{t,T}^M(x); \ \ (t, x) \in \Theta, \ x > 0,$$

и равную 0 при $x = 0$:

$$U(t,0) = 0;\ \ 0 \le t \le T.$$

Из (5.54) и (5.55) ясно, что эта функция удовлетворяет уравнениям

$$U(t,x) = \sum_{k=0}^{x+c-M} p_k + \sum_{k=x+c-M+1}^{x+c} U(t+1, x+c-k)p_k, \qquad \max\{M-c, 1\} \le x < M, \tag{5.58}$$

$$U(t,x) = \sum_{k=0}^{x+c} U(t+1, x+c-k)p_k,\ \ 0 < x < M-c, \tag{5.59}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} U(t,0) &= 0,\ 0 \le t \le T, \\ U(t,M) &= 1,\ 0 \le t \le T, \\ U(T,x) &= 1,\ 1 \le x \le M. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Если доопределить функцию U следующим образом

$$U(t,x) = 1,\ \ t = 0,1,\ldots,T,\ x = M+1, M+2, \ldots, M+c,$$

то уравнения (5.58), (5.59) приводятся к единому виду

$$U(t,x) = \sum_{k=0}^{x+c} U(t+1, x+c-k)p_k,\ \ 0 < x < M \tag{5.61}$$

с сохранением краевых условий (5.60). Решение уравнения (5.61) получается последовательным вычислением "справа налево"(по t). Таким образом вычисляются значения $S_{t,T}^{M}(x)$ при $x = 1,2,\ldots,M,\ t = 0,1,\ldots,T$. Последние позволяют по формулам (5.55) и (при $c \ge M$) (5.54) вычислить $S_{t,T}^{M}(x)$ для $x = 0,-1,\ldots,-c+1;\ t = 0,1,\ldots,T-1$, а отсюда по формуле (5.56) последовательно получаются и все остальные вероятности $S_{0,T}^{M}(x)$, $x = -c, -c-1, \ldots, -Tc+1$. По теореме 5.14 полученное решение для процесса с поглощением на конечном горизонте времени сколь угодно точно приближает вероятность выживания исходного дискретного процесса.

Далее приведен пример расчета вероятности выживания в следующей модели: $c = 1$, распределение убытков Z_1 – пуассоновское

$$p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0,1,\ldots$$

с параметром $\lambda = 0.8$; поглощение установлено на уровне $M = 30$. В таблице 1 приведены значения вероятности выживания $S_{0,T}^{M}(x)$ на конечном горизонте времени $T = 30$ при нескольких значениях начального капитала x.

Таблица 1. Процесс с пуассоновскими убытками

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(x)$	0.445	0.635	0.762	0.845	0.900	0.935	0.958	0.972	0.982	0.988

5.3.3 Общий случай

Пусть теперь F – произвольная функция распределения из $\mathcal{F}_+$, а ξ_F – соответствующая случайная величина. Рассмотрим аппроксимации F дискретными распределениями, аналогичными введенным в 2.5.1. Зафиксируем число $\alpha > 0$ и рассмотрим интервалы $\Delta_k = (k\alpha, (k+1)\alpha]$, $k = 0, 1, \ldots$. Обозначим

$$q_k = F((k+1)\alpha) - F(k\alpha) = \mathbf{P}\{\xi_F \in \Delta_k\},\ k = 0, 1, \ldots$$

и рассмотрим следующие аппроксимации.

Левая аппроксимация. Значениям $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, k\alpha, \ldots$ приписываются вероятности $p_0^l = F(0) + q_0$ и

$$p_k^l = q_k,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Соответствующая функция распределения имеет вид

$$F^\alpha(x) = F((k+1)\alpha);\ \ x \in [k\alpha, (k+1)\alpha),\ k = 0, 1, \ldots.$$

Ясно, что $F^\alpha(x) \geq F(x), x \in \mathbf{R}_+$, то есть имеет место стохастическое доминирование $F^\alpha \preceq_s F$.

Правая аппроксимация. Здесь значениям $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, k\alpha, \ldots$ приписываются вероятности $p_0^r = F(0)$ и

$$p_{k+1}^r = q_k,\ k = 0, 1, \ldots.$$

Соответствующая функция распределения имеет вид

$$F_\alpha(x) = F(k\alpha);\ \ x \in [k\alpha, (k+1)\alpha),\ k = 0, 1, \ldots,$$

причем $F_\alpha(x) \leq F(x),\ x \in \mathbf{R}_+$, то есть $F_\alpha \succeq_s F$.

Применим рассмотренные аппроксимации к вычислению вероятности выживания. Пусть $X(x, c, F)$ – агрегированный процесс риска. Для $\alpha > 0$ и $b \in \mathbf{R}$ обозначим b^α наименьшее число, кратное α, не меньшее b, а b_α – наибольшее число, кратное α, не превосходящее b. Тогда процесс $X^\alpha = X(x^\alpha, c^\alpha, F^\alpha)$ является процессом дискретного типа, и вероятность его выживания S^α вычисляется соответствующим методом (см. параграф 5.3.2), причем по предложениям 5.6, 5.7 имеет место оценка

$$S^\alpha(x) \geq S(x),\ x \in \mathbf{R}_+. \tag{5.62}$$

Процесс $X_\alpha = X(x_\alpha, c_\alpha, F_\alpha)$ также может служить для аппроксимации процесса $X(x, c, F)$, причем вероятность его выживания S_α вычисляется тем же методом, а предложения 5.6, 5.7 дают оценку

$$S_\alpha(x) \leq S(x),\ x \in \mathbf{R}_+. \tag{5.63}$$

Далее в таблице 2 приведены результаты вычисления S^α и S_α в следующей модели: $c = 1$, распределение Z_1 представляет собой смесь показательного распределения с вырожденным в точке 0:

$$F(v) = 0.2 + 0.8(1 - \exp(-\lambda v)),\ v \geq 0,$$

с параметром $\lambda = 1$, так что $\mathbf{E}Z_1 = 0.8$. В верхней строке таблицы приведены значения x, а в левом столбце указаны значения параметра дискретизации α и значение ε максимального отклонения S^α от S_α на интервале $[0, 30]$. В ячейках таблицы приведены значения $S^\alpha(x)$ (вверху) и $S_\alpha(x)$ (внизу).

Таблица 2. Модель с показательным распределением

x	0	1	2	3	4	5	6	7	10
$\alpha = 0.1$	0.362	0.560	0.697	0.791	0.856	0.901	0.932	0.953	0.985
$\varepsilon = 0.1253$	0.261	0.437	0.572	0.676	0.754	0.814	0.860	0.894	0.956
$\alpha = 0.03$	0.324	0.511	0.650	0.748	0.818	0.870	0.907	0.933	0.976
$\varepsilon = 0.0390$	0.293	0.473	0.611	0.711	0.785	0.843	0.883	0.914	0.966
$\alpha = 0.01$	0.328	0.516	0.653	0.750	0.821	0.872	0.908	0.934	0.976
$\varepsilon = 0.0125$	0.317	0.504	0.640	0.739	0.811	0.863	0.901	0.929	0.973

5.4 Взаимная аппроксимация процессов

В настоящем параграфе мы рассмотрим способы аппроксимации характеристик классического процесса риска (5.5) с помощью соответствующих характеристик агрегированного процесса риска (5.15), и наоборот. Точнее, для каждого классического процесса риска $\widetilde{X}(x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda) \in \widetilde{\mathbf{X}}$ будет построен агрегированный процесс $X^\delta(x, c, F) \in \mathbf{X}$, зависящий от параметра аппроксимации δ, такой, что характеристики X^δ могут служить приближениями для соответствующих характеристик $\widetilde{X}$.

5.4.1 Оператор агрегирования

Зафиксируем число $\delta > 0$, и построим аппроксимацию классического процесса риска $\widetilde{X}(x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda) \in \widetilde{\mathbf{X}}$ следующего вида. Разобьем временную область $(0, \infty)$ этого процесса на интервалы

$$\Delta_k = ((k-1)\delta, k\delta],\ k = 1, 2, \ldots$$

и произведем агрегирование премий и убытков, относящихся к каждому из интервалов Δ_k:

$$c = \widetilde{c}\delta, \quad Z_k = \sum_{T_i \in \Delta_k} \widetilde{Z}_i, \; k = 1, 2, \ldots \tag{5.64}$$

Известно [37], что определенные таким образом случайные величины Z_k, $k = 1, 2, \ldots$ независимы и имеют одинаковое составное распределение Пуассона

$$F(v) = F_Z(v) = \mathbf{P}\{Z_1 \le v\} = e^{-\lambda\delta} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda\delta)^i}{i!} \widetilde{F}^{*i}(v), \tag{5.65}$$

где $\widetilde{F}^{*i}$ обозначает i-кратную свертку функции распределения $\widetilde{F}$ с собой. Равенства (5.64) и (5.65) позволяют по заданному классическому процессу риска $\widetilde{X}(x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda) \in \widetilde{\mathbf{X}}$ и значению параметра аппроксимации δ однозначно определить агрегированный процесс риска $X^\delta(x, c, F) \in \mathbf{X}$. Оператор A^δ, выполняющий это преобразование, будем называть оператором агрегирования. Заметим, что процедура агрегирования каждой траектории $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ классического процесса $\widetilde{X}$ ставит в соответствие вполне определенную траекторию $\omega^\delta \in \Omega^\delta$ агрегированного процесса X^δ, поэтому A^δ можно также рассматривать, как оператор из $\widetilde{\Omega}$ в Ω^δ. В дальнейшем выборочную функцию процесса X^δ ($\widetilde{X}$), соответствующую элементу $\omega \in \Omega^\delta$ ($\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$), будем обозначать X^δ_ω ($\widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}$).

Непосредственно из определения оператора агрегирования вытекает

Лемма 5.15 *Пусть $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ – фиксированная траектория классического процесса риска $\widetilde{X}$, а $\omega = A^\delta(\widetilde{\omega})$ – соответствующая траектория агрегированного процесса риска $X^\delta = A^\delta(\widetilde{X})$. Тогда*

$$\widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(n\delta) = X^\delta_\omega(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

5.4.2 Аппроксимация траекторий процессов

Лемма 5.15 дает способ вычисления значений процесса $\widetilde{X}$ по значениям X^δ точках сетки $0, \delta, 2\delta, \ldots$, которые являются граничными точками интервалов Δ_k. В следующей лемме описывается ошибка аппроксимации значений $\widetilde{X}$ во внутренних точках интервалов Δ_k значениями X^δ в точках той же сетки.

Лемма 5.16 *Пусть $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ – фиксированная траектория классического процесса риска $\widetilde{X}$, а $\omega = A^\delta(\widetilde{\omega})$ – соответствующая траектория агрегированного процесса риска $X^\delta = A^\delta(\widetilde{X})$. Тогда с вероятностью 1*

$$X^\delta_\omega(n) - \widetilde{c}\delta \le \widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(t) \le X^\delta_\omega(n-1) + \widetilde{c}\delta, \quad t \in \Delta_n.$$

Доказательство. Напомним, что $\widetilde{F} \in \mathcal{F}_+$, то есть $\widetilde{Z}_i \geq 0$ с вероятностью 1 при любом $i = 1, 2, \ldots$. Из представления классического процесса в виде (5.6) при $t \in \Delta_n$ и $s = (n-1)\delta < t$, с учетом леммы 5.15, имеем

$$\widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(t) = \widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(s) + \widetilde{c}(t-s) - \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} \widetilde{Z}_i \leq X^{\delta}_{\omega}(n-1) + \widetilde{c}(t-s) \leq X^{\delta}_{\omega}(n-1) + \widetilde{c}\delta,$$

что дает правое неравенство в утверждении леммы. Для доказательства левого неравенства заметим, что оно, очевидно, выполняется при $t = n\delta$, а для $t < n\delta$, используя снова представление (5.6) и лемму 5.15, получаем

$$X^{\delta}_{\omega}(n) = \widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(n\delta) = \widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(t) + \widetilde{c}(n\delta - t) - \sum_{i=N(t)+1}^{N(n\delta)} \widetilde{Z}_i \leq \widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(t) + \widetilde{c}(n\delta - t) \leq \widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(t) + \widetilde{c}\delta,$$

что совпадает с левым неравенством. Лемма доказана. $\diamond$

Теперь мы готовы к изучению аппроксимации характеристик классического процесса. Начнем с момента разорения процесса. Напомним, что для разоряющейся траектории $\widetilde{X}_{\widetilde{\omega}} \in \widetilde{\mathcal{R}}(x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda)$ классического процесса $\widetilde{X}(x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda)$ равенством (5.12) вполне определен момент разорения $\widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}(x)$. Аналогично, для произвольной разоряющейся траектории $X_\omega \in \mathcal{R}(x, c, F)$ агрегированного процесса $X(x, c, F)$ посредством (5.20) определен момент разорения $\tau = \tau(x)$. Заметим, что между множествами траекторий процессов $X(x_1, c, F)$ и $X(x_2, c, F)$, различающихся только начальным капиталом, можно установить взаимно-однозначное соответствие равенством

$$X_\omega(x_1, c, F) = X_\omega(x_2, c, F) + (x_1 - x_2),\ \omega \in \Omega.$$

Траектории X_ω, соответствующие начальному капиталу x, будем обозначать $X_{\omega,x}$, а момент разорения траектории ω при начальном капитале x – $\tau_\omega(x)$.

При доказательстве следующей теоремы нам потребуется еще одна лемма, которую можно найти, например, в [45].

Лемма 5.17 *Для случайных величин ξ, η соотношение $\xi \preceq_s \eta$ справедливо тогда и только тогда, когда найдется пара случайных величин (ξ_1, η_1) с тем же распределением, что и (ξ, η), для которой $\xi_1 \leq \eta_1$ почти наверное.*

Теорема 5.18 *Моменты разорения классического и агрегированного процессов удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\tau(x - \widetilde{c}\delta) \preceq_s [\widetilde{\tau}(x)/\delta] \preceq_s \tau(x + \widetilde{c}\delta),\ \ x > 0,$$

где $[a]$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее a.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Omega}$ обозначает множество траекторий классического процесса $\widetilde{X}(x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda)$. Для траектории $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ обозначим $\omega = A^\delta(\widetilde{\omega})$ траекторию аппроксимирующего агрегированного процесса, ω_+ и ω_- – ее сдвиги на $\widetilde{c}\delta$ и $-\widetilde{c}\delta$, а $\tau_\omega(x+\widetilde{c}\delta)$ и $\tau_\omega(x-\widetilde{c}\delta)$ – моменты разорения этих сдвигов, соответственно. По лемме 5.17 достаточно доказать неравенства

$$\tau_\omega(x-\widetilde{c}\delta) \leq [\widetilde{\tau}(x)/\delta] \leq \tau_\omega(x+\widetilde{c}\delta),$$

где не исключаются бесконечные значения некоторых моментов разорения.

Обозначим $k = [\widetilde{\tau}(x)/\delta]$. Ясно, что $\widetilde{\tau}(x) \in \Delta_k$. По лемме 5.16 отсюда вытекает неравенство

$$0 \geq \widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{\tau}(x)) \geq X^\delta_\omega(k) - \widetilde{c}\delta = X^\delta_{\omega-}(k),$$

что и означает $\tau_\omega(x-\widetilde{c}\delta) \leq [\widetilde{\tau}(x)/\delta]$. С другой стороны, при всех $t < \widetilde{\tau}(x)$ имеем $\widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(t) > 0$, что вместе с леммой 5.16 дает

$$0 < \widetilde{X}_{\widetilde{\omega}}(t) \leq X^\delta_\omega(s-1) + \widetilde{c}\delta = X^\delta_{\omega+}(s-1), \quad s = 1, 2, \ldots, k,$$

что означает $\tau_\omega(x+\widetilde{c}\delta) > k-1$. $\diamond$

Теорема 5.19 *Пусть* $\widetilde{X} = \widetilde{X}(x, \widetilde{c}, \widetilde{F}, \lambda)$ *– классический процесс риска, а* $X = X(x, c, F) = A^\delta(\widetilde{X})$ *– аппроксимирующий его агрегированный процесс. Тогда для вероятностей разорения этих процессов справедливы неравенства*

$$R(x+\widetilde{c}\delta) \leq \widetilde{R}(x) \leq R(x-\widetilde{c}\delta), \quad x > 0.$$

Доказательство. Пусть, как и в доказательстве предыдущей теоремы, $\widetilde{\omega}$ – траектория классического процесса, $\omega = A^\delta(\widetilde{\omega})$ – соответствующая траектория аппроксимирующего агрегированного процесса, а ω_-, ω_+ обозначают сдвиги траектории ω на $-\widetilde{c}\delta$ и $\widetilde{c}\delta$, соответственно. Если траектория $\widetilde{\omega}$ разоряется: $\widetilde{X}_{\widetilde{\omega}} \in \widetilde{\mathcal{R}}(x)$, то, по теореме 5.18, имеем

$$\tau(x-\widetilde{c}\delta) \leq [\widetilde{\tau}(x)/\delta] < \infty,$$

что означает $X_{\omega-} \in \mathcal{R}(x-\widetilde{c}\delta)$. Эта импликация и означает, что $\widetilde{R}(x) \leq R(x-\widetilde{c}\delta)$. Если, с другой стороны, $X_{\omega+} \in \mathcal{R}(x+\widetilde{c}\delta)$, то $\tau(x+\widetilde{c}\delta) < \infty$, так что, используя снова теорему 5.18, имеем $[\widetilde{\tau}(x)/\delta] \leq \tau(x+\widetilde{c}\delta)$, то есть $\widetilde{X}_{\widetilde{\omega}} \in \widetilde{\mathcal{R}}(x)$, откуда $R(x+\widetilde{c}\delta) \leq \widetilde{R}(x)$. $\diamond$

Используя дополнительность событий разорения и выживания, из теоремы 5.19 сразу получаем

Следствие 5.20 *Для вероятностей выживания* S, $\widetilde{S}$ *классического процесса* $\widetilde{X}$ *и аппроксимирующего агрегированного процесса* $X = A^\delta(\widetilde{X})$ *справедливы неравенства*

$$S(x-\widetilde{c}\delta) \leq \widetilde{S}(x) \leq S(x+\widetilde{c}\delta), \quad x > 0.$$

Глава 6

Заключение

В монографии рассмотрен единый подход к построению математических моделей, предназначенных для принятия решений в условиях вероятностной неопределенности. Традиционно модели такого типа чаще всего применяются в управлении финансовыми рисками, однако область возможного применения этих моделей существенно шире. При принятии практически любого решения, связанного со значительными затратами, приходится сталкиваться с различного рода неопределенностями, игнорирование которых приводит к существенным потерям в качестве решения, и, следовательно, к неоптимальному использованию ресурсов.

Математическая теория риска в настоящее время бурно развивается. Линейная ветвь теории уже приобрела вполне определенные очертания, хотя и здесь некоторые задачи все еще остаются нерешенными. Нелинейная ветвь пока представляет собой набор слабо связанных между собой конструкций, из которых еще предстоит создавать единое целое. Отметим здесь некоторые задачи, решение которых представляет интерес с этой точки зрения.

В математических моделях теории риска необходимо, так или иначе, учитывать субъективный фактор. Это вызвано, по меньшей мере, двумя обстоятельствами. Во-первых, сама неопределенность связана с недостатком информации, а информированность различных субъектов может быть различной. Во-вторых, различные индивидуумы по-разному относятся к неопределенности, к риску; другими словами, они имеют разные отношения предпочтения на множестве вероятностных распределений. Способы учета субъективного фактора до некоторой степени разработаны в линейной теории фон Неймана - Моргенштерна; здесь удалось формализовать понятие отношения к риску в терминах функции полезности. Необходимо построить процедуры вычисления этого отношения. В нелинейной ветви само понятие отношения к риску пока определяется только в терминах отношения предпочтения на множестве распределений; конструктивные процедуры его вычисления находятся в начальной стадии развития. Продвижения в этой части можно ожидать по двум противоположным направлениям: построение классов функционалов, задающих некоторые отношения предпочтения, а также аксиоматическое построение предпочтений с последующим выяснением класса функционалов, представляющих данную систему аксиом.

В динамической ветви - теории процессов риска - значительный интерес представляет поиск мер риска, отличных от вероятности разорения процесса. Для линейного случая это уже отчасти осуществлено в рамках теории полезности. Нелинейный же случай еще практически не затронут, и представляет собой обширное поле для исследований.

Значительный интерес представляют и вопросы вычисления оптимальных решений. Сюда можно отнести исследование свойств мер риска, как целевых функций оптимизационных задач. Выявление специфических свойств мер риска типа выпуклости позволят строить эффективные методы численной реализации методов принятия решений.

Литература

[1] Александров П.С. (1948) *Введение в общую теорию множеств и функций.* М.-Л.: Гостехиздат, 411 с.

[2] Боровков А.А. (1984) *Математическая статистика.* М.: "Наука".

[3] Боровков А.А. (1986) *Теория вероятностей.* М.: "Наука", 432 с.

[4] Вальд А. (1967) *Статистические решающие функции.* В кн.: Позиционные игры, М.: "Наука", с. 300–522.

[5] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. (1988) *Теория вероятностей и ее инженерные приложения.* М.: "Наука", 480 с.

[6] Воробьев О.Ю. (1997) *Выбор портфелей.* Записки ФАМ-семинара, **1**, Красноярск.: ИВМ СО РАН. - с. 38–61.

[7] Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. (1987) *Введение в теорию массового обслуживания.* М.: "Наука 336 с.

[8] Де Гроот М. (1974) *Оптимальные статистические решения.* М.: Мир - 491 с.

[9] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. (1974) *Теория экстремальных задач.* М.: "Наука 480 с.

[10] В.В.Калашников, Д.Константинидис. Вероятность разорения. // *Фундаментальная и прикладная математика.*- 1996, - т. 2. - в. 4 - с. 1055-1100.

[11] Канторович Л.В., Акилов Г.П. (1977) *Функциональный анализ.* М.: "Наука", 744 с.

[12] Келли Дж.Л. (1981) *Общая топология.* М.: "Наука", 432 с.

[13] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. (1968) *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: "Наука".

[14] Лоэв М. (1962) *Теория вероятностей.* М.: Изд–во иностр. лит. - 720 с.

[15] фон Нейман Дж., Моргенштерн О. (1970) *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука.

[16] Новоселов А.А., Симонов К.В. (1997) *Проблема страхования рисков от морских природных катастроф.//* Тезисы Всероссийской конференции "Проблемы защиты населения и территорий от чрезвычайных ситуаций", Красноярск, с. 106-108.

[17] Новоселов А.А. (1997) *Об управлении финансовыми рисками.//* Тезисы докладов V Всероссийского семинара"Нейроинформатика и ее приложения", Красноярск, с. 127-128.

[18] Новоселов А.А. (1997) *Роль актуарного обследования страховой компании в прогнозировании ее финансовой устойчивости.//* Труды III Всероссийской конференции "Проблемы информатизации региона", Красноярск, с. 284.

[19] Новоселов А.А. (1997) *Страховой портфель.* Записки ФАМ семинара, **1**, с. 62-68.

[20] Новоселов А.А. (1997) *Агрегированный процесс риска.* Записки ФАМ семинара, **1**, ВЦ СО РАН (Красноярск), с. 69-76.

[21] Новоселов А.А. (1997) *Страховой тариф, как рыночная цена страховой услуги.* Записки ФАМ семинара, **1**, ВЦ СО РАН (Красноярск), с. 77-79.

[22] Новоселов А.А. (1998) *Об области притяжения траекторий агрегированного процесса риска.* В кн.: Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике, тезисы докладов, часть III, 1998, с. 141.

[23] Новоселов А.А., Симонов К.В. (1998) *Экологическое страхование от природных катастроф.* В кн.: Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике, тезисы докладов, часть V, 1998, с. 127.

[24] Новоселов А.А. (1998) *Теоретико - игровой подход к проблеме перестрахования.* В кн.: Тезисы докладов I Всероссийского семинара "Моделирование неравновесных систем", Красноярск, ИВМ СО РАН, 1998, с. 168.

[25] Новоселов А.А. (1998) *Прогнозирование риска разорения методом областей притяжения.* В кн.: Тезисы докладов I Всероссийского семинара "Моделирование неравновесных систем", Красноярск, ИВМ СО РАН, 1998, с. 169-170.

[26] Новоселов А.А. (1998) *Управление риском разорения с учетом спроса на страхование.* В кн.: Тезисы докладов I Всероссийского семинара "Моделирование неравновесных систем", Красноярск, ИВМ СО РАН, 1998, с. 171-172.

[27] Новоселов А.А. (1998) *Проблема измерения риска. I. Неформальное введение.* В кн.: Нестандартные и случайно - множественные методы измерения рисков в социально - экономических системах. Красноярск, ИВМ СО РАН, 1998, с. 5-17.

[28] Новоселов А.А. (1998) *Проблема измерения риска. II. Математические модели.* В кн.: Нестандартные и случайно - множественные методы измерения рисков в социально - экономических системах. Красноярск, ИВМ СО РАН, 1998, с. 18-31.

[29] Новоселов А.А. (1998) *Моделирование финансовых рисков.* В кн.: Нестандартные и случайно - множественные методы измерения рисков в социально - экономических системах. Красноярск, ИВМ СО РАН, 1998, с. 32-43.

[30] Новоселов А.А. (1999) *Взаимная аппроксимация характеристик классического и агрегированного процессов риска.* Записки ФАМ семинара, **2**, ИВМ СО РАН (Красноярск), с. 110-119.

[31] Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. (1994) *Финансовый рынок: расчет и риск.* М.: Инфра-М. - 192 с.

[32] М.М.Постников (1981) *Устойчивые многочлены.*– М.: "Наука", 176 с.

[33] Ю.В.Прохоров, Ю.А.Розанов (1987) *Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы.*– М.: "Наука", 400 с.

[34] Рачев С.Т., Рушендорф Л. (1994) Модели и расчеты контрактов с опционами. Теория вероятн. и ее примен., т. 39, в. 1, с. 150–190.

[35] Рисс Ф., Секефальви – Надь Б. (1979) *Лекции по функциональному анализу.* М.: "Мир", 587 с.

[36] Федотов А.М. (1996) *Теоретическое обоснование алгоритмов для решения некорректных задач со случайными ошибками в данных.*// В кн.: Актуальные проблемы информатики, прикладной математики и механики, Красноярск, ВЦ СО РАН, с. 127–153.

[37] В.Феллер (1984) *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.*- М.: "Мир", **1**, 527 с.; **2**, 751 с.

[38] Четыркин Е.М. (1995) *Методы финансовых и коммерческих расчетов.* М.: "Дело Лтд", 320 с.

[39] Ширяев А.Н. (1989) *Вероятность.* М.: Наука, 640с.

[40] Ширяев А.Н. (1994) О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики. Теория вероятн. и ее примен., т. 39, в. 1, с. 5–22.

[41] Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. (1994) К теории расчетов опционов европейского и американского типов, I: Дискретное время. Теория вероятн. и ее примен., т. 39, в. 1, с. 23–79.

[42] Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. (1994) К теории расчетов опционов европейского и американского типов, II: Непрерывное время. Теория вероятн. и ее примен., т. 39, в. 1, с. 80–129.

[43] Artzner, P., Delbaen F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999) Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.

[44] Bassi, F., Embrechts, P., and Kafetzaki, M. (1999) *A survival kit on Quantile Estimation* // EZT Zurich, 19 p.

[45] Bauerle, N., and Muller, A. (1998) *Modeling and Comparing Dependences in Multivariate Risk Portfolios* ASTIN Bulletin, **28**, 1, pp. 59–76.

[46] Biais B., Bjork T., Cvitanic J., Karoui N. El, Jouini E., Rochet J.C. *Financial Mathematics.* 1997, 316p.

[47] Black F., Scholes M. (1973) *The pricing of options and corporate liabilities.*– Journal of Political Economy, No. 3., pp. 637–659.

[48] Brannath, W., and Schachermayer, W. (1998) *A Bipolar Theorem for* $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ Univ. of Vienna, 6 p.

[49] Buhlmann Hans (1970) *Mathematical Methods in Risk Theory* // Springer, Berlin.– 1970.

[50] Buhlmann, H., Delbaen F., Embrechts, P., and Shiryaev, A. (1997) *No–arbitrage, Change of Measure and Conditional Esscher Transforms.* 29 p.

[51] Buhlmann, H., Delbaen F., Embrechts, P., and Shiryaev, A. (1997) *On Esscher Transforms in Discrete Financial Models.* 13 p.

[52] Cramer H. (1930) *On the Mathematical Theory of Risk* // Scandia Jubilee Volume, Stockholm.– 1930.

[53] CreditMetrics, v 4.0 (1997) *Technical Documents.* 200p.

[54] Daykin C.D., Pentikainen T., Pesonen M. (1994) *Practical Risk Theory for Actuaries.* Chapman & Hall, 1994, 546 p.

[55] DeGroot, M. (1970) *Optimal Statistical Decisions.* McGraw Hill Co.

[56] Deelstra, G., and Delbaen F. (1998) *Long–Term Returns in Stochastic Interest Rate Models: Convergence in Law.* 27 p.

[57] Delbaen F. (1998) *Coherent Risk Measures on General Probability Spaces.* ETH, Zurich, 29 p.

[58] Delbaen F. (1998) *A Remark on Slutzky's Theorem.* Seminaire de Probabilites, XXXII, Lecture Notes in Mathematics, 1686, (1998), Springer, pp. 313–315. ETH, Zurich, 29 p.

[59] Delbaen F., Jarchow, H., and Pelczynski, A. (1998) *Subspaces of L_p Isometric to Subspaces of l_p.* 27 p.

[60] Delbaen, E., Monat, P. Schachermayer, W., Schweizer, M., and Stricker, C. (1996) *Weighted Norm Inequalities and Closedness of a Space of Stochastic Integrals.* Univ. of Vienna, 48 p.

[61] Delbaen, F., and Schachermayer, W. (1993) *Arbitrage Possibilities in Bessel Processes and their Relations to Local Martingales.* Univ. of Vienna, 9 p.

[62] Delbaen, F., and Schachermayer, W. (1994) *A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing*, Math. Annalen, **300**, pp. 463–520.

[63] Delbaen, F, and Schachermayer, W. (1994) *The Existence of Absolutely Continuous Local Martingale Measures.* Univ. of Vienna, 18 p.

[64] Delbaen, F., and Schachermayer, W. (1995) *The No–Arbitrage Property under a Change of Numeraire*. Stochastics and Stochastic Reports, **53**, 1995, pp. 213–226.

[65] Delbaen, F., and Schachermayer, W. (1995) *The Variance – Optimal Martingale Measure for Continuous Processes*. Univ. of Vienna, 22 p.

[66] Delbaen, F., and Schachermayer, W. (1995) *The Banach Space of Workable Contingent Claims in Arbitrage Theory*. Univ. of Vienna, 30 p.

[67] Delbaen, F., and Schachermayer, W. (1997) *Non–Arbitrage and the Fundamental Theorem of Asset Pricing: Summary of Main Results*. Proceedings of Symposia on Applied Mathematics, San Diego, 1997, 10 p.

[68] Delbaen, F., and Schachermayer, W. (1998) *A Simple Counter - Example to Several Problems in the Theory of Asset Pricing, which Arises in many Incomplete Markets*. Mathematical Finance, 1997, **7**.

[69] Delbaen, F, and Schachermayer, W. (1998) *The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes*. Math. Annalen.

[70] Delbaen, F., and Schachermayer, W. (1998) *A Compactness Principle for Bounded Sequences of Martingales with Applications*. Univ. of Vienna, 30 p.

[71] Denneberg, D. (1990) Premium calculation: why standard deviation should be replaced by absolute deviation. *ASTIN Bulletin*, **20**, 2, 181–190.

[72] Denneberg, D. (1994) *Non – Additive measure and Integral*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

[73] Diamond, P., and Stiglitz, J. (1974) Increases in Risk and in Risk Aversion, *Journal of Economic Theory*, **8**, 337-360. // University of Melbourne, Research paper No. 47, 8p.

[74] Dickson D. (1997) *On Numerical Evaluation of Finite Time Ruin Probabilities* // University of Melbourne, Research paper No. 47, 8p.

[75] Dickson D., Waters H. (1997) *Ruin Probabilities with compound Assets* // University of Melbourne, Research paper No. 46, 16p.

[76] Ebrahimi, N., Maasoumi, E., Soofi, E. (1999) Ordering univariate distributions by entropy and variance. *Journal of econometrics*, **90**, 2, 317–336.

[77] EMBRECHTS, P. (1996) *Actuarial versus Financial Pricing of Insurance.* Proceedings of the Conference on Risk Management in Insurance, The Wharton School, Philadelphia.

[78] EMBRECHTS, P. (1998) *Extreme Value Theory in Finance and Insurance.* Preprint, EZT Zurich, 8 p.

[79] EMBRECHTS, P., FREY, R., AND FURRER H. (1999) *Stochastic Processes in Finance and Insurance* // EZT Zurich, 49 p.

[80] EMBRECHTS, P., MANEIL, A., AND STRAUMANN, D. (1998) *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*, Preprint, EZT Zurich, 37 p.

[81] EMBRECHTS, P., MANEIL, A., AND STRAUMANN, D. (1998) *Correlation Pitfalls and Alternatives*, Preprint, EZT Zurich, 8 p.

[82] EMBRECHTS, P., REZNICK, S., AND SAMORODNITSKY, G. (1998) *Living on the Edge.* Risk Magazine, 1998.

[83] EMBRECHTS, P., REZNICK, S., AND SAMORODNITSKY, G. (1998) *Extreme Value Theory as a Risk Management Tool.* Preprint, EZT Zurich, 22 p.

[84] FREY R. (1996) *Perfect Option Hedging for a Large Trader.* Unversity of Zurich, 28 p.

[85] FELLER W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and its Aplications.* II (New York, J.Wiley & Sons).

[86] FREY R. (1997) *Derivative Asset Analysis in Models with Level - Dependent and Stochastic Volatility.* Unversity of Zurich, 32 p.

[87] FREY R. (1999) *Superreplication in Stochastic Volatility Models and Optimal Stopping.* Unversity of Zurich, 25 p.

[88] FREY R., AND MICHAUD, P. (1999) *The Effect of GARCH - Type Volatilities on the Prices and Payoff Distributions of Nonlinear Derivative Assets - a Simulation Study.* Unversity of Zurich, 22 p.

[89] FREY R., RUNGGALDIER, W.. (1999) *A nonlinear Filtering Approach to Volatility Estimation with a View Towards High Frequency Data.* Unversity of Zurich, 11 p.

[90] Frey R., Stremme, A.. (1999) *Market Volatility and FeedBack Effects from Dynamic Hedging.* Unversity of Zurich, 26 p.

[91] Frey R., and Sin, C. (1999) *Bounds on European Option Prices under Stochastic Volatility.* Unversity of Zurich, 23 p.

[92] Frey A., Schmidt V. (1996) *Taylor – series Expansion for Multivariate Characteristics of Classical Risk Processes* // Insurance: Mathematics and Economics, 1996, v. 18, No. 1, 1–12.

[93] Friedman, M, and Savage, L. (1948) The Utility Analysis of Choices Involving Risk. *Journal of Polytical Economy*, **56**, 279-304.

[94] Gerber, Hans U. (1997) *Life Insurance Mathematics.* Springer, 3-rd ed., 217p.

[95] Hubalek, F., and Schachermayer, W. (1997) *When does Convergence of Asset Price Processes Imply Convergence of Option Prices?.* Univ. of Vienna, 18 p.

[96] Hurlimann, W. (1998) On Stop–Loss Order and the Distorted Pricing Principle. *ASTIN Bulletin*, **28**, 1, 119–134.

[97] John L. Kelley (1957) *General Topology.* Van Nostrand Company, Inc., Princeton.

[98] Klein, I., and Schachermayer, W. (1995) *Asymptotic Arbitrage in Non–Complete Large Financial Markets.* Theory Prob. Appl., **41**, 927–934.

[99] Kramkov, D., and Schachermayer, W. (1998) *The asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets.* Univ. of Vienna, 48 p.

[100] Landsberger, M., and Meilijson, I. (1990a) A Tail of Two Tails: An Alternative Characterization of Comparative Risk. *Journal of Risk and Uncertainty*, **3**, 65-82.

[101] Landsberger, M., and Meilijson, I. (1990b) Lotteries, Insurance and Starshaped utility functions. *Journal of Economic Theory*, **52**, 1-17.

[102] Landsberger, M., and Meilijson, I. (1994) The Generating PRocess and an Extension of Jewitt's Location Independebt Risk Concept. *Management Science*, **40**, 662-669.

[103] Lundberg F.I. (1903) *Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen*, II. Aterförsäkring av Kollektivrisker.–Uppsala: Almqvist & Wiksell.

[104] Machina, M. (1982) Expected Utility Analysis without the Independence Axiom. *Econometrica*, **50**, 277-323.

[105] Machina, M., and Pratt, J. (1997) Increasing Risk: Some Direct Constructions. *Journal of Risk and Uncertainty*, **14**, 103-127.

[106] Markowitz H. (1952) *Portfolio selection.*– Journal of Finance, 1952, March, p. 77–91.

[107] Markowitz H. (1959) *Portfolio selection. Efficient Diversification of Investments.* New York: Wiley.

[108] Markowitz H. (1990) *Mean – Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.* Cambridge, Massachusetts: Blackwell.

[109] McNeil, A. (1996) *Estimating the Tails of Loss Severity Distributions using Extreme Value Theory.* ASTIN Bulletin, **27**, pp. 117–137.

[110] McNeil, A. (1997) *On Extremes and Crashes* ETH, Zurich, 1997, 6 p.

[111] McNeil, A. (1998) *Calculating Quantile Rusk Measures for Financial Return Series using Extreme Value Theory.* ETH, Zurich, 1996, 21 p.

[112] McNeil, A. (1999) *Extreme Value Theory for Risk Managers.* ETH, Zurich, 1996, 22 p.

[113] McNeil, A., and Frey R. (1999) *Estimation of Time - Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach.* Unversity of Zurich, 28 p.

[114] McNeil, A., and Saladin, T. (1997) *The Peaks over Threshold Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions.* In: XXVIIth International ASTIN Colloquium, 1997, pp. 23–43.

[115] McNeil, A., and Saladin, T. (1998) *Developing Scenarios for Future Extreme Losses Using the POT Model.* ETH, Zurich, 1998, 23 p.

[116] Merton R.C. (1973) *Theory of Rational Option Pricing.*– Bell Journal of Economics and Management Science, 4, pp. 141–183.

[117] Muller, A. (1996) Ordering of Risks: A Comparative Study via Stop-Loss Transform. *Insurance: Mathematics and Economics.* **17**, pp. 215–222.

[118] Muller, A. (1997) Stop–loss Order for Portfolios of Dependent Risks. *Insurance: Mathematics and Economics.* **21**, pp. 219–223.

[119] Muller, A. (1998) *Another Tail of Two Tails: on Characterization of Comparative Risk.* Journal of Risk and Uncertainty, **16**, 2, pp. 187–197.

[120] Muller, A. (1998) *Comparing Risks with Unbounded Distributions.* Journal of Mathematical Economics, **30**, pp. 229–239.

[121] Novosyolov A.A. (1998) *Attraction Area for Paths of an Aggregate Risk Process.* Singapore International Insurance and Actuarial Journal, **2**, 1, June 1998, pp. 139 – 145.

[122] Pratt J.W. (1964) Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, **32**, pp. 122–136.

[123] RiskMetrics, v 4.0 (1996) *Technical Document.* J.P.Morgan, 284p.

[124] Rockafellar, R.T. (1970) *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton.

[125] Rothschild, M., and Stiglitz, J. (1970) Increasing Risk, I: A Definition. *Journal of Economic Theory.* **2**, 225-243.

[126] Rothschild, M., and Stiglitz, J. (1971) Increasing Risk, I: Its Economic Consequences. *Journal of Economic Theory.* **3**, 66-84.

[127] Schachermayer, W. (1992) *Martingale Measures for Discrete Time Processes with Infinite Horizon.* Mathematical Finance, **4**, 1994, pp. 25-55.

[128] Schachermayer, W. (1992) *A Hilbert -Space proof of the Fundamental Theorem of Asset Pricing in Finite Discrete Time.* Univ. of Vienna, 15 p.

[129] Schachermayer, W. (1993) *A Counter - Example to Several Problems in the Theory of Asset Pricing.* Mathematical Finance, **3**, 2, pp. 217–230.

[130] Schachermayer, W. (1997) *Some Remarks on a Paper of David Kreps.* Univ. of Vienna, 6 p.

[131] Schachermayer, W., and Schahinger, W. (1997) *Is there a Predictable Criterion for Mutual Singularity of Two Probability Measures on a Filtered Space?* Univ. of Vienna, 8 p.

[132] Shaked M., Shanthikumar J.G. (1994) *Stochastic Orders and Their Applications*. Academic Press, London.

[133] Shaked M., Shanthikumar J.G. (1997) Supermodular Stochastic Orders and Positive Dependence of Random Vectors. *Journal of Multivariate Analysis* **61**, 81–101.

[134] Shaked M., Shanthikumar J.G. (1985) Some Partial Orderings of Exchangeable Random Variables by Positive Dependence. *Journal of Multivariate Analysis* **17**, 333–349.

[135] Tchen, A.H. (1980) Inequalities for Distributions with Given Marginals. *Annals of Probability* **8**, 814–827.

[136] Tong, Y.L. (1980) *Probability Inequalities in Multivariate Distributions* Academic Press, New York.

[137] Tong, Y.L. (1989) Inequalities for a Class of Positively Dependent Random Variables with a Common Marginal. *Annals of Statistics* **17**, 429–435.

[138] Varian H.R. *Computational Economics and Finance.* 1996, 468p.

[139] Vorob'ov O,Yu., Novosyolov A.A., Simonov K.V., Fomin A.Yu. *Portfolio Analysis of Financial Market Risks by Random Set Tools.* In: Proceedings of the Actuarial Foundation Symposium "The Risks in Investment Accumulation Products of Financial Institutions", NY, 1999, p. 123-152.

[140] Wang, S.(1996) Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, **26**, pp. 71-92.

[141] Wang, S.(1997) Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models & Algorithms. *CAS Publication*, 48 p.

[142] Wirch, J.L.(1998) Risk Measures Using Distorted Probabilities. In: *Second International Congress on Insurance: Mathematics and Economics, 1998*, 31p.

[143] Young V.R.(1999) Discussion of Christofides' Conjecture Regarding Wang's Premium Principle. *ASTIN Bulletin*, **29**, 2, 191–195.